3.3.2. *Структурированные задачи оценки безопасности и устойчивости*

Ретроспективная информация о продолжительности жизненных циклов СЭС представляет собой короткий динамический ряд (случайную конечную выборку малого объема), что не позволяет в полной мере использовать классические методы математической статистики для повышения эффективности (в статистическом смысле) оценок параметров моделей типа Гомперца-Макегама. На продолжительности жизненного цикла оказывает влияние большое количество случайных факторов.

В связи с этим, анализируя стадии цикла СЭС, его математическую модель целесообразно интерпретировать как плотность унимодального распределения случайной величины $T_{жц}$. В качестве таких моделей функции $f(T_{жц})$ в зависимости от информационной ситуации необходимо рассмотреть:

– гамма-распределение

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \tag{3.93}$$

– и распределение Вейбулла

$$f(t) = \frac{1}{t_0} m \left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^m}, \tag{3.94}$$

где m и n –параметры формы, λ и t_0 – параметры масштаба.

Для оценки параметров законов распределений, обладающих наибольшей адаптивностью (m, n, λ и t_0) можно использовать уравнения правдоподобия или метод моментов.

Метод максимального правдоподобия заключается в построении статистических оценок неизвестных параметров распределения, согласно которому в качестве оценок выбираются те значения параметров, при которых данные результаты наблюдений «наиболее вероятны». Применим этот принцип для оценки параметров гамма-распределения с плотностью (3.93). Если в ходе анализа информации (наблюдений) получены следующие значения: t_1, t_2,..., t_k, то логарифмическая функция правдоподобия может быть представлена в виде

$$l = \sum_{i=1}^{k} \{\ln \lambda + (n-1)[\ln \lambda + \ln t_i] - \lambda t_i - \ln \Gamma(n)\} \tag{3.95}$$

Для определения параметров λ и n необходимо решать систему уравнений:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{\lambda} + (n-1)\frac{1}{\lambda} - t_i\right] = 0,$$

$$\frac{dl}{dm} = \sum_{i=1}^{k} \left[\ln \lambda + \ln t_i - \frac{1}{\Gamma(n)} \Psi(n)\right] = 0, \tag{3.96}$$

где $\Psi(n) = \frac{d}{dn}\Gamma(n) = -C - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{k+1}\right)$ – пси функция Эйлера (C=0,5772 ... – постоянная Эйлера).

НЕ КОПИРОВАТЬ

После некоторых несложных алгебраических преобразований можно получить два нелинейных уравнения, определяющих параметры гамма-распределения

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\frac{t_i}{t}=\frac{\Psi(k)}{\Gamma(k)}-\ln k;$$

(3.97)

$$\lambda=\frac{n}{t},$$

(3.90)

где $\bar{t}=E[t]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}t_i$.

Процедура нахождения оценок с помощью метода моментов позволяет получить следующие соотношения

$$m=\left]\frac{\bar{t}^2}{s^2}\right[\quad \text{и} \quad \lambda=\frac{\bar{t}}{s^2},$$

(3.99)

где s^2 – выборочная дисперсия.

Сопоставление оценок, полученных двумя методами, показывает их несовпадение (метод моментов и метод максимального правдоподобия приводят к совпадающим результатам только при оценивании параметров нормального распределения). При больших объемах выборки оценки, полученные методом моментов, асимптотически нормальны и имеют математическое ожидание, лишь величиной порядка k^{-1} отличающееся от истинного значения параметра. Что же касается асимптотического поведения оценок максимального правдоподобия при больших k, то известно, что при достаточно общих условиях этот метод приводит к несмещенным оценкам, которые асимптотически нормальны и эффективны.

Распределение Вейбулла является в настоящее время одним из наиболее распространенных распределений при описании экстремальных величин. Многие задачи оценки показателей могут быть сведены к моделированию распределения Вейбулла.

Это прежде всего связано с большим разнообразием форм, которые могут принимать распределения Вейбулла.

Неоднозначность решения задачи выбора моделей жизненного цикла обусловила необходимость введения их упорядоченности в зависимости от полученных в результате аналитико-статистического или теоретико-расчетного анализа значений их параметров.

При выборе модели стохастического эксперимента располагают, как правило, неполной (ограниченной) информацией о схеме формирования случайных величин. Обычно известными являются лишь некоторые характеристики: значения моментов и ограничения некоторыми пределами области возможных значений случайной величины. Неопределенность исхода стохастического эксперимента обусловливает необходимость ее количественного описания и введения меры неопределенности. Основное исходное положение теории вероятностей предписывает выбирать из множества характеризующихся заданными свойствами распределений те, которое обладает наибольшей мерой неопределенности (концепция принципа максимума энтропии). При выборке модели случайного эксперимента из рассматриваемых распределений предпочтение должно быть отдано тому закону распределения, который обладает большей неопределенностью. Приписывая случайной величине некоторые распределения, имеющие ряд свойств, совпадающих со свойствами действительного (неизвестного) распределения, совершают по необходимости некоторый произвол: выбор одного из рассматриваемых распределений однозначно определяет и те характеристики, которые

нам по условию эксперимента неизвестны. Очевидно, что предпочтение надо отдать тому из рассматриваемых распределений, которое добавляет минимум информации к уже имеющейся. Таким образом, в процессе выбора модели должна оставаться максимальная неопределенность при учете заданных ограничений. Используя концепцию принципа максимума неопределенности и энтропию Шеннона

$$H_2 = -\int f(x) \ln f(x) dx$$

(3.100)

в качестве ее меры для сравнения и выбора соответствующих знаков распределения необходимо ввести частичную упорядоченность в множество одномерных функций распределении по энтропии (H_ε – упорядочение), означающее выполнение следующих условий

$$-\int f_1(x) \ln f_1(x) dx \le -\int f_2(x) \ln f_2(x) dx$$

(3.101)

$$\int x^k f_1(x) dx = \int x^k f_2(x) dx \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{и др.}$$

В условиях малых выборок наблюдается так называемый эффект малого объема выборки, который состоит в том, что подбор подходящего модельного закона для описания определения исследуемой генеральной совокупности приводит к положительному результату для нескольких проверяемых гипотез (выдвигаемые гипотезы не опровергаются), а закон распределения в условиях малых выборок не всегда однозначно предопределен. Используя концепцию принципа неопределенности (H_ε – упорядочение альтернативных законов распределений), можно решать данную задачу.

С этой целью определяются значения дифференциальной энтропии для гамма-распределения и закона Вейбулла

$$H_\varepsilon^\gamma = -\int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \ln \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt =$$

$$= \ln \Gamma(n) + \left[n - (n-1)\psi(n)\right] - \ln \lambda,$$

(3.102)

$$H_\varepsilon^W = \int_0^\infty \frac{1}{t_0} m \left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^m} \ln \left[\frac{1}{t_0} m \left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^m} \right] dt =$$

$$= 1 + \frac{m-1}{m} C - \ln m + \ln t_0.$$

(3.103)

Обозначения функций в зависимости (3.102) и (3.103) соответствует обозначениям, принятым в формулах (3.93) и (3.94).Чтобы исключить из рассмотрения второе условие (3.101), необходимо использовать зависимости, связывающие статистические оценки параметров законов распределения со статистическим моментами. Для гамма-распределения помимо введенных в рассмотрение уравнений правдоподобия можно использовать оценки, полученные методом моментов

$$n = \left] \frac{1}{\nu^2} \right[\qquad (3.104)$$

для целочисленного значения n и

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\lambda = \frac{n}{m_t}.$$

(3.105)

Для распределения Вейбулла следующие соотношения

$$m_t = t_0 \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right),$$

(3.106)

$$\nu^2 = \frac{t^2_0}{m_t^2} \Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - 1,$$

(3.107)

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Исключив второе условие (3.101), сравнение дифференциальных энтропий можно производить используя только один параметр. Для двухмерных законов распределений этот параметр определяется коэффициентом вариации $\nu = \frac{\sigma_t}{m}$. Для распределения формулой (3.104), а для закона распределения формулой (3.104), а для закона распределения Вейбулла – формулами (3.106) и (3.107) из которых следует, что

$$\nu = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right)} - 1}.$$

(3.108)

Область определения решений (3.102) и (3.103) определяет область возможного применения введенных в рассмотрение моделей.

Характерной особенностью статистического анализа в рассматриваемой области является присутствие незавершенности отдельных наблюдений. В этом случае представляется целесообразным использовать процедуру рецензирования, сущность которой заключается в замене цензурированного элемента выборки $\bar{t}_n^{(n)}$ ее условным математическим ожиданием

$$E\left[t_n^{(n)} / \bar{t}_n^{(n)}\right] = c \int_{\bar{t}_n^{(n)}}^{\infty} t f(t) dt,$$

(3.109)

где c –коэффициент нормировки.

Для гамма-распределений условное математическое ожидание

$$E\left[t_n^{(n)} / \bar{t}_n^{(n)}\right] = \frac{1}{1 - F_\gamma\left(n, \bar{t}_n^{(n)}\right)} \int_{\bar{t}_n^{(n)}}^{\infty} t \frac{\lambda(\lambda t)^{-n} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} dt =$$

$$= \frac{\lambda(n-2)}{(n-1)} \frac{\left[1 - F_\gamma\left(n-1, \bar{t}_n^{(n)}\right)\right]}{\left[1 - F_\gamma\left(n, \bar{t}_n^{(n)}\right)\right]},$$

(3.110)

где $F_\gamma(\cdot)$ – значение функции гамма-распределения с аргументом $\bar{t}_n^{(n)}$.

НЕ КОПИРОВАТЬ

Аналогично можно определить условное математическое ожидание и для распределения Вейбулла

$$E\left[t_n^{(n)} \Big/ \bar{t}_n^{(n)}\right] = \frac{1}{1-e^{-\left(\frac{\bar{t}_n^{(n)}}{t_0}\right)^m}} \int_{\bar{t}_n^{(n)}}^{\infty} t \frac{m}{t_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{t_0}\right)} dt =$$

$$= \frac{t_0}{m\left[1-e^{-\left(\frac{\bar{t}_n^{(n)}}{t_0}\right)^m}\right]} \Gamma\left(1+\frac{2}{m}, \left(\frac{\bar{t}_n^{(n)}}{t_0}\right)^m\right),$$

(3.111)

где $\Gamma(\cdot)$ – неполная гамма-функция.

Особым объектом исследования ЖЦ СЭС относятся методы прикладного статистического анализа малых цензурированных выборок.

Особенность непараметрических методов в отличие от классических методов математической статистики состоит в независимости процедур оценки и проверки статистических гипотез от неизвестного теоретического распределения генеральной совокупности, извлечением из которой получена рассматриваемая выборка. Использование классических (параметрических) методов предполагает, что неизвестные теоретические распределения принадлежат какому-либо семейству распределений, зависящему от конечного числа параметров. Для реализации непараметрических методов анализа цензурированных выборок представляется целесообразным использование принципа максимума неопределенности. В основу этого метода может быть положена также идея рецензурирования выборки путем замены цензуркрованного элемента выборки его условным математическим ожиданием.

В наиболее общем случае задачу рецензурированного малой выборки формулируем следующим образом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$. независимы и имеют одну к ту же непрерывную (неизвестную) функцию распределения $F(x)$.

Положим

$$x_1^{(n)} \le x_2^{(n)} \le \ldots \le x_m^{(n)} \le \ldots \le \bar{x}_n^{(n)},$$

где в вариационном ряду $x_1^{(n)} \le \ldots \le x_n^{(n)}$ обозначают элементы выборки, x_k,(k=1,...,n), расположенные в порядке возрастания, $\bar{x}_1^{(n)}$ цензурированный элемент выборки. Методами математической статистики определяется условие математическое ожидание $E\left[x_n^{(n)} \Big/ \bar{x}_n^{(n)}\right]$.

Так, для выборок, для которых известны первые два момента,

$$E\left[x_n^{(n)} \Big/ \tilde{x}_n^{(n)} \right] = m_1 + \sigma \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{\bar{x}_n^{(n)}}{2n}}}{1 - F_n\left(\bar{x}_n^{(n)} \right)},$$

(3.112)

где $F_n(\cdot)$ – функция гипернормального распределения.

Основная задача обеспечения безопасности и устойчивости социально-экономических структур – это оперативное прогнозирование воздействия случайных факторов, вызывающих появление экстремальных ситуаций. Решение этой важной задачи в современных условиях необходимо осуществлять на основе математического и имитационного моделирования. С этой целью может быть предложена концепция информационно-статистического подхода формирования математических моделей и разработки методов идентификации моделей риска по ограниченной информации с учетом сложного характера связей, присущих системе при ее взаимодействии со средой.

Попадание СЭС в экстремальную ситуацию может быть описано моделью резких событий.

Наиболее распространенный моделью редких событий является распределение Пуассона.

$$P_n = P\{r = n\} = \nu^n e^{-\nu}, \qquad n = 0,1,2...$$

(3.113)

Вероятностная природа процессов, определяющих безопасность, диктует и вероятностную оценку. Вероятностные оценки риска, связанные с этапами жизненного цикла, предполагают определение показателей безопасности за определенный период времени *T*. При фиксированном периоде времени *T* показатель безопасности определяется следующим образом

$$P_0 = P_n(r = 0),$$

(3.114)

где P_n – закон Пуассона или его модификация, определяемые информационной ситуацией.

Продолжительность времени *T* в общем случае является величиной случайной, поэтому для определения показателя безопасности следует использовать соотношение

$$P_0 = \frac{1}{0!} f(t)\Big|_{t=0},$$

(3.115)

где $f(t)$ – производящая функция.

Основные расчетные зависимости для оценки показателя безопасности представлены в таблице 3.2. Ниже приведены некоторые комментарии к приведенным расчетным зависимостям.

Комплексный учет различных видов опасности, объективно присущих СЭС, обусловливает необходимость постановки задачи моделирования или прогнозирования «сверхредких» событий. Для многих объектов слежкой структуры не существуют точные оценки числа возможных исходных событий характеризующих признаков и параметров. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть класс моделей «сверхредких» событий, формально описываемый следующей схемой.

Таблица 3.2

Сводная таблица расчетных зависимостей

Общая схема (механизм) формирования случайных величин	Показатель безопасности P_0

ν–число событий в единицу времени	Вероятностная модель	
1	2	3
ν – квазидетермированная величина	Распределение Пуассона	$e^{-\nu}$
ν –распределено по нормальному закону с известными параметрами	Модифицированное распределение Пуассона	$e^{-m_\nu+\frac{\sigma_\nu^2}{2}}$
ν–распределено равномерно $\nu\in(\nu_{\min}\nu_{\max})$	Модифицированное распределение Пуассона	$\frac{e^{-\nu_{\min}}-e^{-\nu_{\max}}}{\nu_{\max}-\nu_{\min}}$
Закон распределения ν аппроксимирован гамма – распределением с параметрами формы m и масштаба λ.	Закон Паскаля (отрицательное биномиальное распределение)	$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^m$
ν распределено по нормальному закону, параметры которого неизвестны, известны лишь оценки параметров $\hat{m}_\nu \;\; u \;\; S_\nu^2$ (объем выборки k, k<10)	Модифицированное распределение Пуассона	$e^{-m_\nu}J(k)$ $J(S_\nu,k)=\int_0^1 e^{-S_\nu\sqrt{2k}}\left(1-\frac{S_\nu^2}{k}\right)^{-\frac{k-1}{2}}$
ν распределено по нормальному закону, параметры которого неизвестны, известны лишь оценки параметров $\hat{m}_\nu \;\; u \;\; S_\nu^2$ (объем выборки k, k>10)	Модифицированное распределение Пуассона	$e^{-m_\nu}J(S_\nu,\sqrt{2k})$ $J(S_\nu,\sqrt{2k})=\int_0^1\exp\left[-S_\nu\sqrt{2k}\sqrt{Ei(\ln p)}\right]dp$

Пусть параметр закона Пуассона ν является случайной величиной. Случайный характер параметра ν может быть обусловлен нарушением стационарности пуассоновского потока, ограниченностью исходной информации о среднем значении числа событий за заданный промежуток времени и др. Пусть о случайной величине известны: математическое ожидание m_ν, и величина центрального момента второго порядка (дисперсия σ_ν^2), Пусть область возможных значений случайной величины можно считать практически неограниченной $-\infty<\nu<\infty$. Это обстоятельство предполагает справедливость условия $\sigma_\nu<<m_\nu$, (практически $m_\nu>3\sigma_\nu$). Пусть наблюдается достаточно большое число случайных событий r (r >10), однако реализуемым ("счетным") является последнее событие (r=1). В условиях рассматриваемого стохастического эксперимента естественным образом возникает задача выбора закона распределения вероятностей p(k) и введения в рассмотрение новой модификации закона Пуассона (построения модели "сверхредких" событий). Можно показать, что экстремальным распределением (распределением, обладающим большей энтропией при определенных выше ограничениях и условиях) является предельное гипернормалъное распределение. Математическое ожидание производящей функции $\bar{f}(t)$ определяется для рассматриваемой схематизации стохастического эксперимента в результате осреднения производящей функции закона Пуассона с учетом маргинального (частного) распределения параметра, квантильная функция которого имеет вид.

$$(\nu=m_\nu+\sigma_\nu\sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}\,. \qquad (3.116)$$

Следовательно,

$$\bar{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(t-1)} f(\nu) d\nu = \int_0^1 e^{(t-1)\left[m_\nu + \sigma_\nu \sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}\right]} dp.$$

(3.117)

По производящей функции распределения по формуле

$$P_k = \frac{1}{k!} \bar{f}^{(k)}(0)$$

можно найти новую модификацию распределения Пуассона и p_0

$$p_0 = e^{-m_\nu} \int_0^1 e^{-\sigma_\nu \sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}} dp.$$

(3.118)

Значения интеграла в формуле (3.118) представлены в табл. (3.3)

Таблица 3.3

Численные значения интеграла $\int_0^1 \exp\left[-\sigma_\nu \sqrt{2n}\sqrt{-E_i}(\ln p)\right] dp$

	,0	,01	,05	,1	,25	,5	,75	,0	,25	,5	,0	,0	,0	,0	,0	,0	0,0	2,0	5,0
0	,0	,993	,966	,934	,847	,724	,626	,545	,479	,424	,539	,230	,166	,125	,102	,061	,040	,027	,015

Полученное выражение дает возможность расчета показателя безопасности социально-экономической системы, функционирующей в экстремальных условиях.

НЕ КОПИРОВАТЬ