2.1. CES-функции. Производственные функции Кобба-Дугласа

Основу эконометрических моделей составляют два вида функциональных зависимостей: производственные функции и функции потребительского спроса. Производственная функция $F(K,L)$ выражает, какое количество продукта можно произвести за единицу времени, обладая капиталом K и трудовыми ресурсами L. Понятие производственной функции неявно включает в себя некоторую оптимизацию. Величина $F(K,L)$ - это максимально возможное количество продукта, которое можно произвести при наилучшем использовании капитальных и трудовых ресурсов. Именно это условие максимизации приводит к часто налагаемому требованию выпуклости функции $F(K,L)$. Точнее, выпуклость функции $F(K,L)$ есть следствие оптимальности распределения ресурсов K и L. При формализованном построении производственной функции обычно предполагается, что функции $F(K,L)$ определены при всех $K \geq 0, \quad L \geq 0$, неотрицательны, положительно однородны первой степени $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$, дважды непрерывно дифференцируемы, причем

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0,$$

$$F(0,L) = F(K,0) = 0.$$

С производственной функцией связаны вполне определенная экономическая интерпретация и некоторые показатели, используемые в экономическом анализе, прежде всего, это производительность труда и предельная производительность труда $\omega = \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}$.

Наиболее часто для квазистатического описания экономической динамики используются производственные функции с постоянной эластичностью замещения (CES-функции), имеющие вид [35]

$$Q = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.1}$$

где $A, \quad \rho = \dfrac{1}{b} - 1, \quad 0 < \alpha < 1$ - константы.

Постоянству эластичности замещения (Constant Elasticity of Substitu-tion – CES) соответствует условие

$$(1+\rho)^{-1} = b = const, \tag{2.2}$$

где b – коэффициент регрессии в линейной зависимости (в логарифмическом масштабе) производительности труда $y = \ln \dfrac{Q}{L}$ и предельной производительности труда $\ln \omega = \ln \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}$

$$\ln y = a + b \ln \omega. \tag{2.3}$$

Производственная функция Кобба-Дугласа является предельным вариантом CES-функции (2.1) при $\rho \to +0$ [38, 39]

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$Q = AK^{\delta} L^{1-\delta}, \tag{2.4}$$

где δ и $(1-\delta)$ - коэффициенты эластичности, определяющие оптимальную пропорцию интенсивности затрат факторов K и L.

Для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность замещения равна единице (основные фонды и трудовые ресурсы в одинаковой мере замещают друг друга).

Вторым предельным вариантом CES-функции является функция с фиксированными пропорциями $(\rho \to +\infty)$ в зависимости (2.1)

$$Q = A\min\{K; L\} \tag{2.5}$$

Для производственной функции с фиксированными пропорциями эластичность замещения нулевая: основные фонды и трудовые ресурсы не могут замещать друг друга, а должны использоваться в заданной пропорции, избыток фондов или трудовых ресурсов не увеличивают выпуска, что соответствует неизменности рабочих режимов технологических процессов.

Производственная функция Кобба-Дугласа и (в несколько меньшей степени) функция полезности Кобба-Дугласа стали традиционным средством анализа экономических вопросов. Однако их применение предлагает принятие довольно суровых ограничений. Например, требования гомотопической эквивалентности и единичной эластичности замены. Заметим, что общий вид гомотетичных производственных функций может быть записан как $Q = F(f(K,L)) = F(Z)$, где F - функция, монотонная по $f(K,L)$, а Z - функция первой степени однородности по K и L. Этот класс функций дает возможность моделировать изменение отдачи от масштаба, равно как и эластичности замены с изменением уровня выпуска. Постулирование ограничений и допущений, принятых при формализации CES-функций, обусловливают необходимость проведения информационно-статистического анализа исходной экономической информации. Достоверность основного постулата теории производственных функций (постоянства эластичности замещения) определяется законом распределения коэффициента регрессии (2.3).

Регрессионный анализ является одним из наиболее распространенных методов обработки результатов наблюдений при изучении зависимостей в экономике и в других областях.

Проблема регрессионного анализа в экономике характерна тем, что о распределениях изучаемых величин нет достаточной информации. Целью регрессионного анализа является определение общего вида уравнения регрессии, построение статистических оценок неизвестных параметров, входящих в уравнение регрессии, и проверка статистических гипотез о коэффициентах регрессии. При изучении связи между двумя величинами по результатам наблюдений $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ предполагается, что одна из них имеет некоторое распределение вероятностей при фиксированном значении другой. В общем случае результаты наблюдений $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ представляют собой выборку из совокупности с некоторым двумерным распределением вероятностей. Формализацию такого распределения по ограниченной информации мы рассмотрим ниже. Использование регрессии обычно производится методами, основанными на принципах средней квадратичной регрессии. Оценка известных коэффициентов регрессии осуществляется методом наименьших квадратов. Этот метод в предположении нормальной распределенности результатов наблюдений приводит к оценкам, совпадающим с оценками наибольшего правдоподобия. Оценки, полученные этим методом, оказываются в некотором смысле наилучшими и в случае отклонения от нормальности, если только объем выборки достаточно велик. При ограниченном объеме выборки представляется целесообразным результаты наблюдений нормализировать. Соответствующие методы нормализации случайных величин будут рассмотрены ниже.

НЕКОММЕРЧАТ

Если заданы n пар наблюденных значений $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ из двумерного распределения, то моменты и другие характеристики выборки определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i, \\
&m_{20} = S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2, \\
&m_{02} = S_2^2 = \frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2, \\
&m_{11} = rS_1 S_2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Коэффициенты линейной средней квадратической регрессии для генеральной совокупности определяются в результате минимизации функции $E[y - a - \beta x]^2$,

где E - оператор определения математического ожидания. Решение этой экстремальной задачи дает единственное решение

$$\beta = \beta_{2i} = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}, \quad a = m_2 - \beta_{2i} m_1, \tag{2.7}$$

где ρ – коэффициент корреляции,

$m_1 = E[y]$, $m_2 = E[x]$ – средние значения величин y и x.

Прямая средней квадратической регрессии в этом случае имеет вид

$$y = m_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1) \tag{2.8}$$

Соответствующие коэффициенты регрессии для выборки могут быть записаны следующим образом

$$b_{21} = \frac{m_{11}}{m_{20}} = \frac{rS_2}{S_1}, \quad b_{12} = \frac{m_{11}}{m_{02}} = \frac{rS_1}{S_2}. \tag{2.9}$$

Достаточно рассмотреть выборочное распределение величины b_{21} (распределение для b_{12} получается с помощью перестановки индексов).

Выражение для плотности вероятности выборочного коэффициента регрессии b_{21} имеет вид (К.Пирсон):

$$f_n(b_{21}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\mathrm{M}^{\frac{n-1}{2}}}{\mu_{20}^{\frac{n-2}{2}} \left(\mu_{20} b_{21}^2 - 2\mu_{11} b_{21} + \mu_{02}\right)^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.10}$$

где $\mathrm{M} = \mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2$ - детерминант матрицы вторых моментов $\mathrm{M} = \begin{Vmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{Vmatrix}$.

Если ввести новую величину

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$t = \frac{\mu_{20}\sqrt{n-1}}{\sqrt{\mathrm{M}}}\left(b_{21} - \beta_{21}\right) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(b_{21} - \beta_{21}\right), \qquad (2.11)$$

то можно показать, что t распределено по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Плотность вероятности (2.10) содержит все три теоретических момента μ_{20}, μ_{11} и μ_{02} и, если необходимо оценить гипотетическое (истинное) значение коэффициента регрессии β_{21}, то представляется целесообразным рассмотреть величину

$$t' = \frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\left(b_{21} - \beta_{21}\right), \qquad (2.12)$$

в которой характеристики совокупности σ_1, σ_2 и ρ заменены соответствующими выборочными характеристиками S_1, S_2 и r, а множитель $\sqrt{n-1}$ заменен на $\sqrt{n-2}$. В этом случае статистика t' (2.12) имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы [36].

Используя распределение Стьюдента, можно поставить и решить задачу проверки статистических гипотез о равенстве единице или нулю $H_1 : \beta = 1; \quad H_2 : \beta = 0$ коэффициента регрессии в зависимости (2.3). Такое решение позволяет оценить с определенной долей вероятности предпочтительность предельных вариантов CES-функций: функции Кобба-Дугласа (2.4) или функции с фиксированными пропорциями (2.5). Решение этой проблемы идентификации представляется целесообразным рассмотреть с позиций теории распознавания образов.

2.2. Синтез безальтернативных гипотез и выбор структуры производственных функций

Анализ задач распознавания явлений в случае, когда между признаками объектов и классами, к которым они могут быть отнесены, существуют вероятностные связи, показывает, что построение алгоритмов распознавания может быть основано на результатах теории статистических решений. Сущность такого подхода в теории распознавания образов заключается в следующем. Пусть совокупность объектов подразделена на классы Ω_1 и Ω_2, а для характеристики объектов используется признак x. Известны описания классов – условные плотности распределения вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ значений признака объектов классов Ω_1 и Ω_2. В результате эксперимента определено значение признака x^0 распознаваемого объекта.

Чтобы определить, к какому классу отнести объект вводят некоторое значение признака x_0 и следующее правило принятия решений: если наблюдаемое значение признака у распознаваемого объекта $x^0 > x_0$, то объект следует отнести к классу Ω_1, если $x^0 \le x_0$ - к классу Ω_2. Если объект относится к классу Ω_1, а его считают объектом класса Ω_2, то совершена ошибка (ошибка 1 рода), условная вероятность которой

$$Q_1 = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x)dx = \alpha. \qquad (2.13)$$

(по терминологии теории статистических решений, ошибочно выбрана гипотеза H_2, в то время как справедлива гипотеза H_1). Наоборот, если справедлива гипотеза H_2, а отдано

НЕ КОПИРОВАТЬ

предпочтение гипотезе H_1, то совершена ошибка второго рода, условная вероятность которой

$$Q_2 = \int_{\infty}^{x_0} f_2(x)dx = \beta, \qquad (2.14)$$

(по терминологии теории статистических решений, ошибочно выбрана гипотеза H_1, в то время как справедлива гипотеза H_2).

Наглядное представление о ситуации принятия решений в теории распознавания образов дает таблица 2.1.

Табл.2.1

Варианты принятия статистического решения

Заключение по гипотезе H_1	Гипотеза H_1	
	Верна	Неверна (верна H_2)
Принята	1-α (правильное решение)	β (ошибка второго рода)
Отвергнута (принята H_2)	α (ошибка первого рода)	1-β (правильное решение)

Соображения, которыми руководствуются в теории распознавания образов при выборе значения признака x_0 (при разделении пространства признаков x на два пространства), основаны на учете потерь, сопряженных с правильными и ошибочными решениями. Однако при анализе минимального объема информации (при анализе коротких динамических рядов) в интересах прогнозирования, идентификации экономических процессов и решения ряда других задач представляется целесообразным сформулировать принцип синтеза безальтернативных гипотез, сущность которого заключается в следующем.

По результатам статистического анализа может быть принято правильное решение относительно гипотезы H_1 с вероятностью (1-α)

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(x/H_1)dx \qquad (2.15)$$

или гипотезы H_2 с вероятностью (1-β)

$$1-\beta = \int_{x_1}^{\infty} f_2(x_1/H_2)dx, \qquad (2.16)$$

где x_1 - наблюдаемое (расчетное) значение статистики критерия.

Если нет соображений неформального порядка о необходимости разделения пространства признаков на две подобласти, а это наиболее типовая ситуация статистического анализа малых выборок, то вполне логично допустить, что результаты наблюдений (элементы) выборки можно описать композицией законов распределения $f_1(x/H_1)$ и $f_2(x/H_2)$ с весами, равными соответственно (1-α) и (1-β).

Следовательно, для гипотезы $H_1 : \beta = 1$, используя условие (2.12) и распределение Стьюдента, получим

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}(b-1)} f(t)dt, \qquad (2.17)$$

и для гипотезы $H_2 : \beta = 0$

$$1-\beta = \int_{\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}b}^{\infty} f(t)dt, \qquad (2.18)$$

где $f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{(n-2)\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)}\left(1+\dfrac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$ - плотность t-распределения Стьюдента с $n-2$ степенью свободы.

С помощью статистических таблиц для t-распределения можно определить интегралы (2.17) и (2.18) и после нормировки полученных значений вероятностей найти весовые коэффициенты, соответствующие производственным функциям (2.4) и (2.5). Отсюда следует, что комплексированная производственная функция с постоянной эластичностью замещения может быть представлена в виде следующей CES-функции

$$Q = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}AK^{\delta}L^{1-\delta} + \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}A\min\{K;L\}. \qquad (2.19)$$

Экономические исследования, в основе которых лежит выборочный метод, представляют собой определенный класс исследований, осуществляемых с целью получения достоверной и конкретной информации о процессе, состояние которого требует адекватного и быстрого управленческого воздействия. Точность получаемой в результате таких исследований информации зависит от объема выборки.

Метод последовательного анализа А.Вальда основан на том, что для каждой последовательности n наблюдений рассматриваются отношения правдоподобия

$$K(n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f_2(x_i/H_2)}{\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i/H_1)} \qquad (2.20)$$

и решающее правило, заключающееся в том, что при использовании последовательного анализа рассматриваются три непересекающиеся области принятия статистического решения: гипотезы H_1, альтернативной гипотезы H_2 и неопределенности, обусловливающей необходимость продолжения наблюдений, а в рассматриваемой проблеме необходимость синтеза безальтернативных гипотез.

В зависимости (2.20) числитель и знаменатель представляют собой функции правдоподобия для непрерывных независимых случайных величин (выборки $X_i, i = 1,...,n$).

НЕ КОПИРОВАТЬ

Граничные точки, определяющие взаимное положение зон принятия гипотез H_1, H_2 и зоны неопределенности, связаны с вероятностями ошибок α первого (отвергнуть верную гипотезу H_1) и β второго рода (принять неверную гипотезу H_2).

Гипотеза H_1 принимается тогда, когда окажется, что $K(n) \le \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ и отвергается (принимается H_2), если $K(n) \ge \dfrac{1-\beta}{\alpha}$. Если после n наблюдений имеет место

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < K(n) \le \frac{1-\beta}{\alpha}, \tag{2.21}$$

то необходимо осуществить композицию гипотез.

Ограниченный объем наблюдений не позволяет достаточно надежно идентифицировать закон распределения экономических показателей x. В условиях малых выборок достаточно надежно определить плотность распределения $f(x)$ затруднительно. С другой стороны, выборке случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ можно поставить в соответствие эмпирическую функцию распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, x \le x_1^{(n)}; \\ \dfrac{k}{n}, x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}; \\ 1, x > x_n^{(n)}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Эмпирическая функция распределения сходится по вероятности к исходному теоретическому распределению $F(x)$ и это позволяет для больших выборок при определении экономических параметров использовать так называемые бутстреп-процедуры, сущность которых заключается в многократном тиражировании выборочных наблюдений $X_i, i = 1,.....,n$ и использование извлеченных данных для расчета искомых показателей.

Многократное тиражирование выборочных наблюдений (бутстреп-процедуры) с целью оценки экономических параметров с уменьшением объема выборки порождает неоднозначность значений случайной величины на интервалах (спейсингах). Поэтому необходимо ввести в рассмотрение сглаженную функцию квантилей распределения оценки параметра

$$X_p = \sum_{k=0}^{n-1} C_k p^k, \tag{2.23}$$

коэффициенты которой должны удовлетворять системе неравенств, определяемых эмпирической функцией распределения наблюдаемых случайных величин (2.22).

Неоднозначность выбора коэффициентов ряда (2.23), обусловленная системой ограничений в виде неравенств, может быть преодолена с помощью принципа максимума неопределенности.

Рассматривая в качестве меры неопределенности энтропию Шеннона

$$H_\varepsilon = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \tag{2.24}$$

и ограничения, обусловленные функцией распределения (2.22), построенной по выборке случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, исходная экстремальная задача была редуцирована к виду

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$H_\varepsilon = \int_0^1 \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} kC_k p^{k-1}\right)dp \to \frac{\max}{C_k}, \qquad (2.25)$$

$$X_k^{(n)} \le C_0 + C_1\frac{k}{n} + C_2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + C_{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} \le X_{k+1}^{(n)}, k = 1,\ldots,n. \qquad (2.26)$$

Решение экстремальной задачи (2.25), (2.26) позволяет однозначно определить коэффициенты функции квантилей (2.23).

Напомним, что экстремум H_ε может достигаться на экстремалях, состоящих из кусков экстремалей, лежащих в области, определяемой системой неравенств (эмпирической функцией распределения параметров) и кусков границы этой области. Часть экстремали, лежащей в области, ограниченной системой неравенств, является прямой, касательной к левой и правой границе, соответствующей системе строгих равенств и односторонним вариациям. Если общей касательной к этим границам не существует, то экстремум энтропии достигается на границах области.

Не нарушая общности рассуждений, будем считать что в результате решения системы уравнений, определяющих границы области, получены коэффициенты ряда функций квантилей распределения

$$a_0 + a_1\frac{k}{n} + a_2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} = x_k^{(n)} \qquad (2.27)$$
$$k = 1,\ldots,n$$

для левой границы;

$$b_0 + b_1\frac{k}{n} + b_2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + b_{n-2}\left(\frac{k}{n}\right)^{n-2} = x_{k+1}^{(n)} \qquad (2.28)$$
$$k = 1,..n.,$$

для правой границы.

Учитывая, что плотности распределения $f(x)$ соответствует функция $\left(\frac{dx}{dp}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} KC_k p^{k-1}\right)^{-1}$, то отношение правдоподобия (2.20) можно представить соответствующим образом

$$K(n) = \frac{\prod_{n=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} kb_k\left(\frac{k}{n}\right)^{k-1}}{\prod_{n=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} ka_k\left(\frac{k}{n}\right)^{k-1}} \qquad (2.29)$$

Очевидно, что коэффициенты a_k и b_k зависят от объема выборки и наблюдаемых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$. Следовательно, используя отношение правдоподобия (2.29) и граничные условия (2.21), можно принять либо гипотезу H_1 (квантильную функцию $x = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$), либо гипотезу H_2 (квантильную функцию $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k$), либо попасть в область неопределенности

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\ln\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{\sum_{n=1}^{n-1}\ln\sum_{n=1}^{n-1}kb_k\left(\frac{k}{n}\right)^{k-1}}{\sum_{n=1}^{n}\ln\sum_{n=1}^{n}ka_k\left(\frac{k}{n}\right)^{k-1}} < \ln\frac{1-\beta}{\alpha}. \qquad (2.30)$$

Для выборок из нормальной генеральной совокупности, задаваясь значениями ошибок первого α и второго рода β, можно получить из отношения правдоподобия (2.20) условия принятия гипотез $H_1 : \beta = 1, \quad H_2 : \beta = 0$. Если отношение правдоподобия попадает в область неопределенности, то целесообразно осуществить синтез гипотез H_1 и H_2. Отношение правдоподобия (2.20) для рассматриваемого случая после сокращения общих множителей и несложных преобразований может быть записано следующим образом

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \le \left[1+\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}(b-1)\right]^{-\frac{n-1}{2}} \le \frac{1-\beta}{\alpha}. \qquad (2.31)$$

Отсюда следует, что синтез гипотез $H_1 : b = 1$ и $H_2 : b = 0$ представляется целесообразным производить в том случае, если выборочное значение коэффициента регрессии b попадает в область

$$\frac{\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}}}{1-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}} - 1 < b < \frac{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left(1-\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\right)-\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}}{1-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{S_1}{S_2}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}}. \qquad (2.32)$$

Полученные результаты относятся к выборкам из однородной нормальной (гауссовой) генеральной совокупности. Ряды показателей экономической динамики обладают сложной структурой, включающей различные составляющие. Идентификация таких рядов затруднена ограниченным объемом информации (короткими динамическими и временными рядами). Это обстоятельство обусловливает необходимость введения тестов проверки небольших последовательностей случайных чисел на принадлежность их нормальной генеральной совокупности.

2.3. Идентификация экономических и логистических процессов по ограниченной информации

Идентификация экономических и логистических процессов, экспресс-оценка момента их «разладки» и прогнозирование дальнейшего их развития на основе первых наблюдений может быть сведена к процедуре проверки статистических гипотез. В соответствии с этим в тестах проверки небольших последовательностей случайных чисел (коротких динамических рядов) необходимо использование некоторых функций от наблюдаемых случайных величин (статистик), законов их распределений и критериев. Многие вводимые далее в рассмотрение статистики имеют форму $T = \frac{X}{Y}$, где X и Y независимые случайные величины и $Y > 0$. Обозначим их функции распределения через $F(x)$ и $Q(y)$, а их плотности через $f(x)$ и

$q(y)$ соответственно. Так как величина Y предполагается положительной, то $q(y)$ сосредоточено на оси $0,\infty$, и поэтому

$$P\{T \le t\} = P\{X \le tY\} = \int_0^\infty F(ty)q(y)dy. \tag{2.33}$$

Дифференцируя, находим, что отношение $T = \dfrac{X}{Y}$ обладает плотностью

$$W(t) = \int_0^\infty f(ty)yq(y)dy. \tag{2.34}$$

На вероятностном языке такой прием называется рандомизацией [30] и означает рассмотрение знаменателя величины $T = \dfrac{X}{Y}$ как случайной величины Y.

Используя метод рандомизации, докажем ряд теорем, которые окажутся полезными в дальнейших приложениях.

Теорема 2.1. Пусть X и Y - независимые случайные величины, плотности которых имеют вид

$$f(x) = \frac{\mu(\mu x)^{m-1}e^{-\mu x}}{\Gamma(m)} \tag{2.35}$$

и

$$g(y) = \frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}e^{-\lambda y}}{\Gamma(n)}, \tag{2.36}$$

тогда отношение $T = \dfrac{X}{Y}$ обладает плотностью

$$f(t) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \frac{t^{m-1}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^m}{\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}t\right)^{m+n}}. \tag{2.37}$$

Доказательство. В соответствие с (2.34)

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}e^{-\lambda y}}{\Gamma(n)} y \frac{\mu(\mu ty)^{m-1}e^{-\mu ty}}{\Gamma(m)} dy = \frac{\lambda^n \mu^m t^{m-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \times$$

$$\times \int_0^\infty y^{n+m-1}e^{-y(\lambda+\mu t)}dy = \frac{\lambda^n \mu^m t^{m-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \frac{\Gamma(m+n)}{(\lambda+\mu t)^{m+n}} \times \tag{2.38}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu t)^{m+n} y^{n+m-1}e^{-y(\lambda+\mu t)}}{\Gamma(m+n)} dy.$$

В последнем выражении интеграл является интегралом от плотности гамма-распределения и, естественно, равен единице. После несложных преобразований

НЕ КОПИРОВАТЬ

соотношение (2.38) может быть преобразовано в выражение для плотности (2.37). Теорема доказана.

Из теоремы 2.1. в силу большой общности гамма-распределения вытекает ряд полезных следствий, позволяющих оценить момент разладки простейшего потока, потока Эрланга и др. Так, например, если отношение $\frac{X}{Y}$ представляет собой отношение двух показательно распределенных случайных независимых величин с параметром λ, то плотность их отношения T имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}. \tag{2.39}$$

Если случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром λ_1, а величина Y распределена по экспоненциальному закону с параметром λ_2, то плотность их отношения имеет вид

$$f(t) = \frac{k}{(1+kt)^2}, \tag{2.40}$$

где $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

<u>Теорема 2.2.</u> Пусть X нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_1^2 и пусть Y нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_2^2, тогда отношение их квадратов $L_1^2 = \frac{X^2}{Y^2}$ распределено по закону

$$P\{L^2 \le t\} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\pi}\sigma_2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}. \tag{2.41}$$

<u>Доказательство</u>. Плотность распределения квадрата нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 имеет вид

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sigma_2}\eta^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\eta}{2\sigma^2}}. \tag{2.42}$$

Тогда в соответствии с зависимостью (2.34) плотность распределения $L_1^2 = \frac{X^2}{Y^2}$ определятся следующим образом

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$f(t)=\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-\eta\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)}d\eta=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}\left(\sigma_1^2 t+\sigma_1^2\right)}, \tag{2.43}$$

Что соответствует закону распределения (2.41). Теорема доказана.

<u>Теорема 2.3.</u> Пусть X нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $\tilde{x}$ и дисперсией σ^2 и пусть Y нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, тогда статистика $L_2^2=\frac{X^2}{Y^2}$ распределена по закону

$$P\left\{L_2^2\le t\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{0}\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^k e^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(k+1)(t+1)^{k+1}}dt, \tag{2.44}$$

где $m=\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma}\right)^2$.

<u>Доказательство</u>. Случайная величина $\frac{X^2}{\sigma^2}$ имеет нецентральное χ^2-распределение со степенью свободы $n=1$ и параметром нецентральности $m=\left(\frac{\tilde{x}}{\sigma}\right)^2$. Нецентральное χ^2-распределение является «смесью» χ^2-распределений с пуассоновскими весами. Следовательно, плотность вероятности величины $Z=\frac{X^2}{\sigma^2}$ определяется следующим образом

$$f(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^k e^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(k)}\frac{Z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{Z}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sigma^2. \tag{2.45}$$

Плотность распределения случайной величины Y^2 определяется зависимостью (2.42). Следовательно, согласно (2.34) после сокращений и перемены порядка суммирования и интегрирования плотность распределения статистики L_2^2 будет иметь следующий вид

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{k}e^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(k+1)(t+1)^{k+1}}, \qquad (2.46)$$

которая определяет закон распределения (2.44). Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}$ распределена по стандартному нормальному закону $\left(m_x = 0, \quad \sigma_x^2 = 1\right)$, тогда статистика $L = \frac{X_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ распределена по закону

$$F(L)=\frac{4\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-L^2\right), \qquad (2.47)$$

где ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

Доказательство. Плотность распределения числителя статистики L является плотностью квадрата стандартной нормально распределенной случайной величины

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Плотность распределения $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ определяется зависимостью

$$q(Z)=\frac{Z^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{Z}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Тогда

$$f(L)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi LZ}}e^{-\frac{LZ}{2}}\frac{ZZ^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{Z}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}dZ=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{L}(L+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (2.48)$$

Отсюда следует, что закон распределения статистики L определяется следующим образом

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$F(L)=\int_0^L \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{L}(1+L)^{\frac{n+1}{2}}}dL=\frac{4\Gamma\left(\frac{n+1}{1}\right)L}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}\quad {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-L^2\right).$$

Теорема доказана.

В задачах оценивания характеристик экономических м логистических процессов по ограниченному числу наблюдений, идентификации экономических и логостических процессов и др. представляется целесообразным использование статистики

$$R=X_n^{(n)}-X_1^{(n)},$$

называемой размахом или широтой выборки $X_n^{(n)}$ и $X_1^{(n)}$ - крайние члены вариационного ряда). Точное распределение порядковых статистик $X_n^{(n)}$ и $X_1^{(n)}$ зависит от исходного распределения, поэтому в общем виде распределение размаха определяется следующим образом

$$P\left\{X_n^{(n)}-X_1^{(n)}<t\right\}=n\int_{-\infty}^{\infty}\left[P(x+t)-P(x)\right]^{n-1}dP(x). \tag{2.49}$$

Можно показать, что для выборки из равномерно распределенной генеральной совокупности с плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{b-a},x\in(a,b), \tag{2.50}$$

плотность распределения размаха имеет вид

$$f(t)=n(n-1)\frac{t^{n-2}}{(b-a)^{n-1}}. \tag{2.51}$$

Действительно,

$$P\left\{X_n^{(n)}-X_1^{(n)}<t\right\}=n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x-a+t}{b-a}-\frac{x-a}{b-a}\right]^{n-1}\frac{1}{b-a}dx=n\frac{t^{n-1}}{(b-a)^{n-1}}. \tag{2.52}$$

Дифференцируя закон распределения (2.52) по t получим (2.51).

Плотность распределения размаха для выборки из нормальной генеральной совокупности в общем виде определяется следующим образом

$$\frac{d}{dt}P\left\{X_n^{(n)}-X_1^{(n)}<t\right\}=\frac{d}{dt}n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(x+t)-\Phi(x)\right]^{n-1}d\Phi(x).$$

Дифференцируя под знаком интеграла функцию Лапласа $\Phi(x+t)$, получим

$$f(t)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(x+t)-\Phi(x)\right]^{n-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m+t)^2}{2\sigma^2}}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \tag{2.53}$$

НЕ КОПИРОВАТЬ

В частном, но важном для статистического анализа малых выборок и коротких динамических рядов при $n=2$ и $m=0$, плотность распределения размаха центрированной случайной величины будет иметь вид

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}. \qquad (2.54)$$

Введем в рассмотрение статистику $\kappa=\frac{t_N}{t_R}$ - отношение размахов двух центрированных случайных величин (нормальной и равномерной). Для центрированной равномерно распределенной случайной величины $X\in(-r,r)$ при $n=2$ плотность распределения размаха (2.52) преобразуется в следующую зависимость

$$f(t_R)=\frac{1}{r}. \qquad (2.55)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2.5.</u> Плотность распределения статистики $\kappa=\frac{t_N}{t_R}$ определяется зависимостью

$$f(\kappa)=\frac{4\sigma}{r\sqrt{\pi}}\frac{1}{\kappa^2}\left(1-e^{-\frac{\kappa^2 r^2}{4\sigma^2}}\right). \qquad (2.56)$$

Доказательство теоремы элементарно и сводится к взятию интеграла

$$f(\kappa)=\int_0^r\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\kappa^2 r^2}{4\sigma^2}}t_R\frac{1}{r}dt_R.$$

Идентификация случайных последовательностей, нестационарных случайных последовательностей, нестационарных случайных процессов и их производных по первым реализациям динамического ряда обусловливает необходимость введения в рассмотрение выборочного распределения коэффициента вариации. Коэффициентом вариации (коэффициентом изменчивости выборки) является отношение

$$v=\frac{S}{\bar{x}}, \qquad (2.57)$$

где $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ и $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2$ – среднее значение и дисперсия выборки соответственно.

Гауссово распределение не обладает тем свойством, что случайная величина может принимать только положительные значения, однако если $\frac{\sigma}{m}$ достаточно велико (более 3), то центральные моменты такого распределения будут с достаточной точностью равны соответствующим моментам полного нормального распределения. В этом случае

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$E(v)=\frac{\sigma}{m},$$
$$D^2(v)=\frac{\sigma^2}{2m^2n}\left(1+2\frac{\sigma^2}{m^2}\right), \tag{2.58}$$

где $D^2(v)$ – дисперсия величины v.

Величина v является величиной непрерывного типа, следовательно, функция распределения $F(v)$ всюду непрерывна, а плотность вероятности $f(v)$ может быть определена следующим образом

$$f(v)=\frac{dF(v)}{dv}.$$

Не нарушая общности рассуждений и с целью использования зависимости (2.34) определим плотность распределения величины, обратной выборочному коэффициенту вариации $W=\frac{1}{v}$, для выборки $X_1, X_2,..., X_n$ из гауссовой генеральной совокупности с дисперсией σ^2 и средним $m=0$.

Если каждая из независимых величин $X_1, X_2,..., X_n$ нормальна $(0,\sigma^2)$, то величины $\frac{X_1}{\sigma},...,\frac{X_n}{\sigma}$ независимы и нормальны (0,1). Таким образом, плотность вероятности величины S равна

$$f_n(S)=\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}S^{n-1}e^{-\frac{n}{2\sigma^2}S^2}. \tag{2.59}$$

Среднее арифметическое $\bar{x}$ распределено нормально $N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Поэтому можно показать, что плотность $f(\omega)$ можно определить следующим образом

$$f(\omega)=2\int_0^\infty\frac{\sqrt{n}\cdot 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}S^n e^{-S^2\frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)}dS. \tag{2.60}$$

При n - нечетном

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\int_0^\infty S^n e^{-S^2 \frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)} dS = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\left[\frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)\right]^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (2.61)$$

При n - четном

$$\int_0^\infty S^n e^{-S^2 \frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)} dS = \frac{(n+1)!!}{2\left[2\frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{n}{2\sigma^2}\left(\omega^2+1\right)}}. \qquad (2.62)$$

После соответствующих преобразований плотность распределения величины ω будет иметь вид

$$f(\omega) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(\omega^2+1\right)^{\frac{n+1}{n}}}. \qquad (2.63)$$

Учитывая, что $\left|\frac{d\omega}{dv}\right| = \frac{1}{v^2}$, получаем следующий результат.

<u>Теорема 2.6.</u> Пусть $X_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, тогда для выборки $X_1, \ldots, X_n$ плотность распределения выборочного коэффициента вариации $v = \frac{S}{\bar{x}}$ имеет вид

$$f(v) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{v^{n-1}}{\left(v^2+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (2.64)$$

Универсальный характер нормального (гауссова) распределения и полнота теоретических исследований, относящихся к нему, обусловливают необходимость обратиться к задаче анализа стохастического процесса, описывающего динамику изменения экономических параметров для тех случаев, когда соответствующие оценки и допущения предполагают получение анализируемых данных в виде случайных величин, распределенных по закону Гаусса. С этой целью представляется целесообразным предварительно проверить гипотезу о принадлежности исходных данных нормальной совокупности и, если такая гипотеза будет отвергнута, то найти соответствующее нормализующее преобразование выборочных данных, позволяющее решать задачу прогноза, оценку эффективности принимаемых решений и др. Заметим, что эта задача в силу ограниченного объема исходной информации должна решаться в условиях малых выборок.

В тестах проверки небольших последовательностей случайных чисел на нормальность представляется целесообразным использовать непараметрические статистики. Порядок их формирования заключается в следующем. По выборке объема n формируется вариационный

НЕ КОПИРОВАТЬ

ряд $X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le ... \le X_n^{(n)}$. Для нормального закона распределения, используя известные соотношения

$$x_i = m_x + \sigma_x \eta_i, \quad i = 1,...,n,$$

где η_i - стандартная нормально распределенная случайная величина с параметрами $m_\eta = 0$ и $\sigma_\eta = 1$, можно получить непараметрическое преобразование в виде

$$\aleph = \frac{X_{i+1}^{(n)} - X_1^{(n)}}{X_n^{(n)} - X_1^{(n)}} = \frac{\eta_{i+1}^{(n)} - \eta_1^{(n)}}{\eta_n^{(n)} - \eta_1^{(n)}}, \quad i = 1,...,n-2. \tag{2.65}$$

Нетрудно заметить, что статистики $\aleph_i$ не зависят от параметров исходного (гипотетического) распределения, а зависят только от стандартных нормально распределенных величин и объема выборки.

Для дальнейшего использования непараметрических статистик необходимо знать законы их распределения. С этой целью приведем без доказательства следующую теорему [16].

Теорема 2.7. Пусть случайные величины x_1, x_2 и x_3 взаимно независимы и распределены одинаково нормально, тогда плотность распределения отношения $\aleph = \dfrac{x_2^{(3)} - x_1^{(3)}}{x_3^{(3)} - x_1^{(3)}}$ имеет вид

$$f(\aleph) = \frac{4(2-\aleph)}{\pi\sqrt{2 - 2\aleph + \aleph^2}\left(\aleph^2 - \aleph + 1\right)}. \tag{2.66}$$

Аналогичная теорема имеет место и для случая $n > 3$.

Теорема 2.8. Пусть случайные величины $x_1,...,x_n$ взаимно независимы и распределены одинаково нормально и пусть $x_1^{(n)} \le x_k^{(n)} \le x_n^{(n)}$ - вариационный ряд, где $x_k^{(n)} = \dfrac{1}{k}\sum_{i=2}^{n-1} x_i^{(n)}$ и $k = n-2$, тогда плотность распределения статистики

$$\aleph = \frac{x_k^{(n)} - x_1^{(n)}}{x_n^{(n)} - x_1^{(n)}} \tag{2.67}$$

имеет вид

$$f(\aleph) = \frac{\left(\dfrac{k+1}{k} - \aleph\right)}{arctg\sqrt{k}\sqrt{\aleph^2 - 2\aleph + \dfrac{k+1}{k}}\left(\aleph^2 - 2\aleph + \dfrac{k+1}{k}\right)}, \tag{2.68}$$

Сформированные непараметрические статистики могут быть использованы для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальной генеральной совокупности. Для выборки объема $n = 3$ интегральная функция распределения $\aleph$-статистики имеет вид

$$F(\aleph) = \int_0^{\aleph} \frac{4(2-\aleph)}{\pi\left(\aleph^2 - \aleph + 1\right)\sqrt{2 - 2\aleph + \aleph^2}}\, d\aleph = \frac{4}{\pi} arctg \frac{\aleph}{\sqrt{\aleph^2 - 2\aleph + 2}}, \tag{2.69}$$

НЕ КОПИРОВАТЬ

для выборок объема $n > 3$ интегральная функция распределения статистики (2.67) определяется аналогично

$$F(\aleph) = \int_0^{\aleph} \frac{\left(\frac{k+1}{k} - \aleph\right)}{arctg\sqrt{k}\sqrt{\aleph^2 - 2\aleph + \frac{k+1}{k}\left(2\aleph^2 - 2\aleph + \frac{k+1}{k}\right)}} d\aleph =$$

$$= \frac{arctg\dfrac{\aleph}{\sqrt{\aleph^2 - 2\aleph + \frac{k+1}{k}}}}{arctg\sqrt{k}}. \qquad (2.70)$$

Границы критической области $\aleph$ определяются по зависимостям (2.69) и (2.70) по уровню значимости a.

При этом принятие решения о виде закона распределения осуществляется на основе сравнения расчетного значения критерия $\aleph$ с критерием $\aleph_{кр}$. Если

$$\aleph_{кр}(a) \le \aleph_{р} \le \aleph_{кр}(1-a), \qquad (2.71)$$

то нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу.

Таким образом, введенные в рассмотрение тестовые статистики (см. таблицу 2.2) позволяют идентифицировать короткие динамические ряды и малые выборки из гауссовых совокупностей по ограниченной информации. Область применения этих статистик не ограничивается только нормальными совокупностями. Если функция распределения не является функцией гауссова распределения, то можно произвести нормализацию случайных величин и использовать приведенные выше статистики и законы их распределения для идентификации экономических и логистических процессов.

2.4. Нормализация показателей экономических и логистических систем

В тех случаях, когда гипотеза о принадлежности статистической выборки генеральной нормальной совокупности не подтверждается, представляется целесообразным найти такое преобразование произвольной случайной величины, в результате которого можно было бы перейти к гауссову распределению. Объективно существует потребность разработки специфических методов решения задачи нахождения нормализующего преобразования и разработки для этого соответствующего аналитического аппарата.

С этой целью предварительно введем в рассмотрение некоторые вспомогательные сведения и сформулируем возможные варианты постановки задачи нормализации случайных величин.

Основным понятием теории вероятностей является понятие вероятностного (случайного, стохастического) эксперимента, исход которого не вполне однозначно определяется условиями опыта. Предметом изучения теории вероятностей являются математические модели случайных экспериментов. Моделью исхода стохастического эксперимента является случайная величина X. С точки зрения теории вероятностей обычно предполагается, что всю информацию о случайной величине содержит функция распределения.

В том случае, когда случайная величина X является непрерывной и может быть представлена случайной точкой прямой (континуума), функцию распределения $F(x)$ такой случайной величины X определяют как вероятность того, что величина X примет значение, меньшее x

НЕКОПИРОВАТЬ

Тестовые статистики и области их применения

№ п/п	Статистика	Плотность распределения (№ формулы)	Целесообразная область применения в статистическом анализе		Объем выборки
			динамического (временного) ряда	вариационного ряда	
1.	$L_1^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $x \sim N\left(0, \sigma_1^2\right)$ $y \sim N\left(0, \sigma_2^2\right)$	2.43	+	-	$n \geq 4$
2.	$L_2^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $x \sim N\left(\tilde{x}, \sigma^2\right)$ $y \sim N\left(0, \sigma^2\right)$	2.46	+	-	$n \geq 4$
3.	$L = \frac{x_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $x \sim N(0,1)$	2.48	+	-	$n \geq 4$
4.	$K = \frac{t_N}{t_R}$	2.56	+	+	$n = 4$

НЕ КОПИРОВАТЬ

Продолжение табл.2.2

№ п/п	Статистика	Плотность распределения (№ формулы)	Целесообразная область применения в статистическом анализе		Объем выборки
			динамического (временного) ряда	вариационного ряда	
5.	отношение размахов центрированных с.в. (нормальной и равномерной) $v = \frac{s}{\bar{x}}$ $\omega = \frac{\bar{x}}{s}$	2.64 2.63	-	+	$n \geq 3$
6.	$x \sim N\left(\tilde{x}, \sigma^2\right)$ $\aleph = \frac{x_2^{(3)} - x_1^{(3)}}{x_3^{(3)} - x_1^{(3)}}$	2.66	-	+	$n = 3$
7.	$x \sim N\left(\tilde{x}, \sigma^2\right)$ $\aleph = \frac{x_K^{(n)} - x_1^{(n)}}{x_n^{(n)} - x_1^{(n)}}$	2.7	-	+	$n \geq 3$

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Если для функции распределения $F(x)$ допустимо представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

то $f(x)$ называется плотностью распределения.

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2

$$x \sim N(m, \sigma^2),$$

если плотность вероятности этой случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Помимо функции распределения и ее плотности однозначно могут определять закон распределения случайных чисел также характеристическая функция и функция квантилей (обратная функция распределения).

Характеристическая функция $\phi(t)$ есть преобразование Фурье-Стильтьеса функции распределения

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

где t - действительная переменная, i - мнимая единица.

Для функции распределения $F(x)$, отображающей значение X в вероятность P, обратная функция $G(P)$, отображающая P в X, называется функцией квантилей:

$$P = F(x), \quad X_p = G(P).$$

В дальнейшем нам потребуются зависимости для нормальных квантилей. В качестве метода построения такой зависимости представляется целесообразным использовать метод операторных рядов, с помощью которых могут быть получены разложение в ряд для квантили нормального закона распределения и рекуррентные формулы для коэффициентов ряда. Основной результат заключается в следующем.

Пусть $\Phi(x)$ - функция распределения стандартного нормального закона $(m = 0, \quad \sigma^2 = 1)$ и пусть P - фиксированный уровень значимости $0 < P < 1$. Тогда для любого P разложение в ряд квантили X_p (решения уравнения $\Phi(x) = P$) имеет вид:

$$X_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(P - \frac{1}{2}\right)\nu}{\nu!} (2\pi)^{\frac{\nu}{2}} \psi_\nu(0), \tag{2.72}$$

где $\psi_\nu(x)$ - рекуррентная функция, определяемая следующим образом

$$\psi_{\nu+1}(x) = \dot{\psi}_\nu(x) + \nu x \psi_\nu(x);$$
$$\psi_1(x) = 1.$$

НЕ КОПИРОВАТЬ

(вычисленные значения множителей $\psi_\nu(0)$ при $\nu = 2n+1$ приведены в таблице 2.3).

Очевидно, что из соотношения (2.72) следуют некоторые характерные свойства рассматриваемого ряда, вытекающие из правил дифференцирования

$$\frac{dX_p}{dP} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(P - \frac{1}{2}\right)^{\nu}}{\nu!} (2\pi)^{\frac{\nu+1}{2}} \psi_{\nu+1}(0);$$

(2.73)

$$\left(\frac{dX_p}{dP}\right)_{P=\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{\nu+1}{2}} \psi_{\nu+1}(0).$$

(2.74)

Зависимости (2.82) и (2.83) без особых трудностей обобщаются на производные более высоких порядков

$$\frac{d^k X_p}{dP^k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(P - \frac{1}{2}\right)^{\nu}}{\nu!} (2\pi)^{\frac{\nu+k}{2}} \psi_{\nu+k}(0); \qquad (2.75)$$

$$\left(\frac{d^k X_p}{dP^k}\right)_{P=\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{k}{2}} \psi_{\nu+k}(0). \qquad (2.76)$$

Выбор опорной точки $\left(X_0 = 0, \quad P_0 = \frac{1}{2}\right)$ определяет и следующее свойство коэффициентов ряда

$$\psi_2(0) = \psi_4(0) = \ldots = \psi_{2k}(0) = 0.$$

Табл.2.3

Значения функции $\psi_\nu(0)$

ν	$\psi_\nu(0)$
1	1
3	1
5	7
7	$1{,}27 \cdot 10^2$
9	$4{,}369 \cdot 10^4$
11	$2{,}43649 \cdot 10^5$
13	$2{,}0036983 \cdot 10^7$
15	$2{,}280356863 \cdot 10^9$
17	$3{,}4314143376\ 1 \cdot 10^{11}$

НЕ КОПИРОВАТЬ

19	$6{,}5967241200\ 0010004 \cdot 10^{13}$
21	$1{,}5773461423\ 793767 \cdot 10^{16}$
23	$4{,}5912271232\ 3094543 \cdot 10^{18}$
25	$1{,}5983517332\ 9760986 \cdot 10^{21}$
27	$6{,}5578224979\ 531719 \cdot 10^{23}$
29	$3{,}1316040486\ 4973855 \cdot 10^{26}$
31	$1{,}7220168512\ 957348 \cdot 10^{29}$
33	$1{,}0863494767\ 62042 \cdot 10^{32}$
35	$7{,}6683701969\ 7267813 \cdot 10^{34}$
37	$6{,}1154674195\ 3243309 \cdot 10^{37}$
39	$5{,}4441029530\ 5740295 \cdot 10^{40}$

И последнее, как было отмечено выше, о свойствах генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ можно судить и по ее эмпирическому аналогу (выборке), точнее по свойствам некоторых функций от случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ (статистик). В связи с этим задача нормализации случайных величин может быть сформулирована в одной из следующих постановок.

Постановка 1. Пусть случайная величина T имеет закон распределения $F(t)$, необходимо исходную случайную величину T подвергнуть такому преобразованию

$$X = \varphi(T), \tag{2.77}$$

в результате которого случайная величина X имела бы плотность гауссова распределения.

Постановка 2. Пусть случайная величина T имеет некоторый закон распределения вероятностей с плотностью распределения, равной $f(t)$. Требуется найти нормализующее преобразование (2.77).

Постановка 3. Дана характеристическая функция $\phi(t)$ некоторой функции распределения случайной величины Z, требуется найти нормализующее преобразование (2.77) этой случайной величины.

Постановка 4. Дана функция квантилей случайной величины T, требуется найти нормализующее преобразование $X = \varphi(T)$.

Постановка 5. Пусть $T_1, ..., T_n$ независимы и одинаково распределены с общей (неизвестной) функцией распределения $F(t)$, требуется найти нормализующее преобразование (2.77) случайной величины T.

Не нарушая общности рассуждений, рассматриваемые задачи будем решать применительно к стандартному нормальному распределению.

Рассмотрим решение задачи нормализации случайной величины T в постановке 1. Основной результат этой задачи можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть $F(t) = P\{T < t\}$ - функция распределения случайной величины T, тогда для нее существует нормализующее преобразование вида

$$X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left[F(t) - \frac{1}{2}\right]^{\nu}}{\nu!} (2\pi)^{\frac{\nu}{2}} \psi_{\nu}(0),$$

(2.78)

где $\psi_{\nu}(0)$ являются коэффициентами разложения в ряд квантили стандартного нормального распределения (2.72).

Доказательство. Если уравнение

$$\Phi(x) = F(t)$$

(2.79)

однозначно разрешимо относительно t, то применив инверсный оператор $\Phi^{-1}(x)$ к обеим частям уравнения (2.79), получим

$$X = \Phi^{-1}(x) F(t) = P\{T < t\}.$$

(2.80)

Поскольку квантиль (2.89) определяется соотношением (2.81), то явное выражение для нормализующего преобразования приобретает вид (2.78), что и доказывает теорему.

Аналогичным образом могут получены нормализующие преобразования и для других постановок.

Правомерным является также использование квантильной функции (2.23), построенной в результате решения конечной системы линейных относительно искомых коэффициентов, уравнений, составленных с помощью вариационного ряда.

Представление функции квантилей в виде ряда

$$T_p = T_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (p - p_0)^{\nu} \frac{C_{\nu}}{\nu!}$$

(2.81)

позволяет определить коэффициенты разложения нормализующего преобразования для выборочных значений $T_k^{(n)}$ при $T_0 = \Phi^{-1}(p_0)$ следующим образом

$$K_x^1 \Big|_{x_0} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{x_0^2}{2}} \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \right)^{-1}_{p=\Phi(x_0)} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{x_0^2}{2}} C_1^{-1},$$

$$K_x^2 \Big|_{x_0} = 2\pi e^{\frac{x_0^2}{2}} \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \right)^{-1}_{p=\Phi(x_0)} \left\{ x_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \right)^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \right)^{-2} \frac{\partial^2 T_p}{\partial p^2} \right\}_{p=\Phi(x_0)} =$$

$$= 2\pi e^{\frac{x_0}{2}} C_1^{-1} \left(x_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} C_1^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{C_2}{C_1} \right) \quad \text{и др.}$$

В качестве примера, иллюстрирующего приложение полученных результатов, рассмотрим возможность нормализации параметров регрессионной зависимости (2.3). О

НЕ КОПИРОВАТЬ

необходимости нормализации показателей $y = \ln \frac{Q}{L}$ и $\ln \omega$ было указано выше. Оценки показателей Q (доход), L (трудовой ресурс), $\omega = \frac{\partial F}{\partial L}$ (предельная производительность труда) являются случайными величинами, законы распределения которых могут быть аппроксимированы по результатам анализа репрезентативной статистической информации. Представляется целесообразным в силу большой общности и гибкости закона распределения рассматриваемых показателей аппроксимировать гамма-распределениями и (или) распределениями типа Грама-Шарлье.

Пусть величина Q распределена по закону гамма-распределения с параметром формы m и параметром масштаба μ, а показатель L распределен по закону гамма-распределения соответственно с параметрами n и λ, тогда отношение величин $T = \frac{Q}{L}$ распределено в соответствии с теоремой 2.1 по закону с плотностью (2.37). Отсюда следует, если произвести замену $y = \ln T$, что случайная величина y будет распределена по закону с плотностью

$$f(y) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \frac{e^{ym}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m}{\left(1+\frac{\mu}{\lambda}e^y\right)^{m+n}}. \tag{2.82}$$

Нормализующее преобразование для величины y равно

$$x = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{y^S}{S!} K_x^S \big|_{x=0}, \tag{2.83}$$

где $K_x^1\big|_0 = f(0)\sqrt{2\pi}\psi_1(0) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m \left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-(m+n)}$;

$$K_x^2\big|_0 = \left.\frac{\partial f(y)}{\partial y}\right|_{y=0} \cdot \sqrt{2\pi}\psi_1(0) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m \times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-m-n} - \frac{\mu}{\lambda}(m+n)\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-m-n-1}\right]$$

.и т.д.

К числу распределений, обладающих широкими возможностями для аппроксимации эмпирических данных, относятся распределения, задаваемые рядами вида

$$f(t) = A_0\varphi_0(t) + A_1\varphi'(t) + A_2\varphi''(t) + \ldots, \tag{2.84}$$

где $\varphi_0(t), \varphi'(t), \varphi''(t)$ – плотность нормального распределения и ее последовательные производные;

НЕ КОПИРОВАТЬ

A_0, A_1, A_2 – коэффициенты, определяемые через начальные моменты n-го $(n = 0,1,...)$ порядка случайной переменной

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma}.$$

Распределение (2.84) правомерно рассматривать как обобщение нормального распределения, поскольку с его помощью можно представить распределения, отличающиеся от гауссовского. Это следует из структуры формулы, которая включает плотность нормального распределения и поправки, характеризующие асимметрию и эксцесс. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство далее вместо ряда (2.84) будем использовать запись

$$f(t) = \varphi(t) - \frac{1}{6} S_k \overset{III}{\varphi}(t) + \frac{1}{24} E_x \overset{IV}{\varphi}(t),$$

(2.85)

где S_k, E_x – соответственно асимметрия и эксцесс распределения $f(t)$;

$$S_k = \mu_3, \quad E_x = \mu_4 - 3,$$

μ_3 и μ_4 – центральные моменты 3-го и 4-го порядка.

Кривые, описываемые зависимостью (2.85) были впервые использованы в 1879 г. Грамом, изучены Шарлье и получили в дальнейшем название кривых (распределений) Грама-Шарлье. Основная область приложения распределения Грама-Шарлье – аппроксимация распределений, близких к нормальным, но отличающихся от него некоторой асимметрией и эксцессом («косостью» и «крутостью» кривых). В отдельных случаях для аппроксимации эмпирических зависимостей может использоваться число членов ряда, большее, чем в зависимости (2.85).

При выполнении преобразований, связанных с нормализацией случайных величин, распределенных по закону Грама-Шарлье необходимо использовать производные плотности нормального распределения

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (-t);$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^2 - 1);$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (-t^3 + 3t);$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^4 - 6t^2 + 3);$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (10t^3 - t^5 - 15t);$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^6 - 15t^4 + 45t^2 - 15) \text{ и др.}$$

(2.86)

Используя зависимости для нормализующих преобразований для случайных величин, распределенных по закону Грама-Шарлье, в виде

$$x = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{t^S}{S!} K_x^S \big|_0 ,$$

(2.87)

Находим

где $K_x^1 \big|_0 = 1 + \frac{E_x}{8}$;

$K_x^2 \big|_0 = -\frac{S_k}{2}$;

$K_x^3 \big|_0 = -\frac{5}{8} E_x$ и др.

Таким образом, рассмотренные информационно-статистические методы позволяют в квазистатической постановке определить структуру и осуществить параметризацию производственных функций на ограниченной основе прогноза. Для математического описания динамики элементов экономики и логостики в производственные функции необходимо ввести еще один явный аргумент – время t.

2.5. Параметризация нестационарных производственных функций

Введение зависимости производственной функции от времени позволяет учесть экзогенные факторы. Например, воздействие на экономику научно-технического

НЕ КОПИРОВАТЬ

прогресса, инфляционных процессов и др. Нестационарная производственная функция отражает изменение во времени эффективно экономики.

Наиболее простой формализацией концепции экономического роста без привлечения дополнительных ресурсов является производственная функция вида

$$Q(t) = F(K(t), L(t), t), \tag{2.88}$$

где $Q(t)$ - выпуск продукции в момент времени t,

$K(t)$ и $L(t)$ - объемы использованных при этом основных фондов и трудовых ресурсов.

Время t в качестве самостоятельной переменной отражает воздействие экзогенных факторов на процесс.

В теории производственных функций используются различные гипотезы относительно связей фондовооруженности труда $\kappa = \frac{K}{L}$, фондоотдачи $Z = \frac{Q}{K}$, производительности труда $y = \frac{Q}{L}$, предельной производительности труда $\omega = \frac{\partial F}{\partial L}$, предельной нормы замещения труда основными фондами $S = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^{-1}$, эластичности замещения труда основными фондами $\sigma = \frac{\partial \ln K}{\partial \ln S}$ и t, на основе которых получают различные виды функциональной зависимости (2.88). Среди способов оценки воздействия на экономику научно-технического прогресса распространены гипотезы нейтрального воздействия, сущность которых сводится к тому, что функциональная связь между некоторыми парами перечисленных параметров $(\kappa, Z, y, \omega, S$ и $\sigma)$ не содержит явно времени. В зависимости от выбора такой пары различают три типа нейтрального научно-технического прогресса [40]:

– в смысле Хикса (S зависит только от κ)

$$F(K, L, t) = T(t)G(K, L); \tag{2.89}$$

– в смысле Харрода (r зависит только от Z)

$$F(K, L, t) = Q(K, T(t)L); \tag{2.90}$$

– в смысле Солоу (ω зависит только от y)

$$F(K, L, t) = G(KT(t), L), \tag{2.91}$$

где $T(t)$ - функция, учитывающая нестационарность $(\dot{T}(t) > 0, \quad T(0) > 0)$, а $G(K, L)$ - производственная функция, не учитывающая влияние научно-технического прогресса.

Для разработки требований к моделям (2.88) – (2.91) необходимо рассмотреть некоторые количественные закономерности, среди которых экспоненциальный рост занимает особое положение. Многие экономические и логостические процессы развиваются экспоненциально достаточно длительное время. Так, например, модель Солоу с факторовеличивающим автономным экзогенным научно-техническим процессом выглядит следующим образом [52]:

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$
\begin{aligned}
&Q = F\big(A(t)K, B(T)L\big),\\
&A(t) = e^{at}, a \ge 0; a \equiv cont, B(t) = e^{bt}, b \ge 0, b \equiv const,\\
&Q = I + C,\\
&I = SQ, \quad 0 < S < 1, \quad S \equiv const,\\
&\dot{L} = nL, \quad n > 0, \quad n \equiv const,\\
&\dot{K} = I - \lambda K, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \equiv const,\\
&K(0) = K_0 > 0, \quad L(0) = L_0 > 0,
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

где I – валовые капиталовложения, C – потребление, S – норма накопления, λ – норма выбытия основного капитала, n – темп прироста трудовых ресурсов, a – темп капиталоувеличивающего научно-технического прогресса, b – темп трудоувеличивающего научно-технического прогресса.

В том случае, когда экспоненциальный рост с постоянной константой воспроизводства сменяется ростом, при котором константа воспроизводства падает обратно пропорционально времени, имеет место так называемое аллометрическое соотношение (закон гетерогенного роста)

$$
A(t) = Ct^{\alpha}. \tag{2.93}
$$

Такие зависимости позволяют описать существенно более продолжительные участки развития, чем зависимости, получаемые в случае экспоненциального роста с постоянной константой воспроизводства.

Представление зависимости $A(t)$ моделью логистического типа

$$
A(t) = \frac{r}{\gamma\left\{1 + \left[\dfrac{r}{\gamma A(t_0)} - 1\right]e^{-rt}\right\}}, \tag{2.94}
$$

где параметры r и γ, определяемые в результате обработки статистической информации, позволяет отразить ограниченный характер роста и предельное значение функции $A(t)$ при $t \to \infty$. Заметим, что из вполне очевидного содержательного смысла функции $A(t)$ следует $A(t_0) = A(0) = 1$.

Влияние большого числа факторов стохастического характера обусловливают необходимость интерпретации функциональных зависимостей в терминах теории случайных функций. Существующие методы анализа случайных функций (метод статистических испытаний, метод эквивалентных возмущений и их различные модификации) предполагают предварительное сведение случайной функции к системе случайных величин. Ряд процессов, описывающих воздействие внешних факторов на формирование функциональных зависимостей (производственных функций) может быть представлен нестационарными случайными функциями, для которых известны лишь некоторые моментные характеристики функционалов от этих функций. В терминах рассматриваемого вопроса это математическое ожидание и дисперсия дохода и др. Неполнота задания вероятностных характеристик затрудняет применение стандартных методов разложений случайной функции с целью анализа процесса. Возникшую в связи с

НЕ КОПИРОВАТЬ

этим неопределенность представляется целесообразным преодолеть с помощью принципа максимума энтропии.

Сущность такого подхода заключается в следующем. В соответствии с теорией неканонических разложений случайную производственную функцию $Q(t)$ можно представить в пределах точности корреляционной теории в форме

$$Q(t) = m_Q(t) + \lambda_1 \sin\omega t + \lambda_2 \cos\omega t,$$

(2.95)

где $m_Q = E[Q(t)]$ – математическое ожидание, λ_1, λ_2 - независимые случайные величины с произвольным законом распределения, имеющие

$$E[\lambda_1] = E[\lambda_2] = 0, E\left[\lambda_1^2\right] = E\left[\lambda_2^2\right] = \sigma_Q^2,$$

(E – оператор нахождения математического ожидания).

Для функции $Q(t)$ по результатам наблюдения за квазистационарным состоянием возможно представление математического ожидания в виде

$$m_Q(t) = \begin{cases} m_Q(0), & t \le t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

(2.96)

Тогда для процесса (2.95) корреляционная функция имеет вид

$$K_Q(t_1, t_2) = E[Q(t_1)Q(t_2)] = \sigma_Q^2 \int_0^{\omega_c} [\sin\omega t_1 \sin\omega t_2 + \cos\omega t_1 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2] f(\omega) d\omega,$$

(2.97)

где $f(\omega)$ – плотность распределения случайного параметра ω,

ω_c – «частота» среза (необходимость введения ее станет очевидной из дальнейших рассуждений).

При $t_2 - t_1 = t_0$

$$K(t_0) = \sigma_Q^2 \int_0^{\omega_c} f(\omega) \cos\omega t_0 d\omega.$$

(2.98)

Если известны математическое ожидание и дисперсия интеграла от случайной функции $Q(t)$

$$R = \int_0^{\infty} m_Q(t) dt = m_Q(0) t_0,$$

$$\sigma_R^2 = K_Q(0)$$

(2.99)

то определив корреляционную функцию $K_R(t_1, t_2)$

$$K_R(t_1, t_2) = \sigma_Q^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_Q(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \sigma_Q^2 \int_0^{\omega_c} \frac{f(\omega)}{\omega^2} (\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 +$$

$$+ \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 + 1 - \cos\omega t_1 - \cos\omega t_2) d\omega$$

НЕ КОПИРОВАТЬ

при $t_1 - t_2 = t_0$ найдем

$$\sigma_R^2 = 2\sigma_Q^2 \int_0^{\omega_c} \frac{f(\omega)}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)d\omega. \qquad (2.100)$$

Получение таких информативных характеристик при анализе квазистационарного состояния экономики вполне очевидно.

Применение принципа максимума энтропии позволяет преодолеть неопределенность, порождаемую отсутствием информации о корреляционной функции процесса $K_Q(t_1, t_2)$, и определить плотность распределения $f(\omega)$ в результате решения следующей вариационной задачи с изопериметрическими условиями:

$$H_\varepsilon = -\int_0^{\omega_c} f(\omega)\ln f(\omega)d\omega \to \max_{f(\omega)};$$

$$\frac{\sigma_R^2}{2\sigma_Q^2} = \int_0^{\omega_c} \frac{f(\omega)}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)d\omega;$$

$$1 = \int_0^{\omega_c} f(\omega)d\omega.$$

(2.101)

Плотность распределения случайной величины ω, получаемая в результате решения уравнения Эйлера-Лагранжа вариационной задачи имеет вид

$$f(\omega) = ce^{\nu\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega\tau)}, \qquad (2.102)$$

где c - нормирующий множитель; ν - множитель Лагранжа, определяемый из соотношения (2.100).

Нетрудно заметить, что максимум энтропии H_ε достигается на распределениях вида (2.102) в классе финитных функций, так как несобственный интеграл от плотности распределения (2.102) расходится.

После того как решена задача описания законов распределения необходимо определить правую границу интервала финитной функции распределения ω_c («частоту» среза). С учетом выражения для плотности распределения (2.102) и двух последних соотношений (2.101) энтропия Шеннона имеет вид

$$H = -\int_0^{\omega_c} ce^{\nu\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} \ln ce^{\nu\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega = -\ln c - \nu\lambda^2,$$

(2.103)

где $\lambda^2 = \dfrac{\sigma_R^2}{2\sigma_Q^2}$.

Можно показать, что экстремум энтропии реализуется при соотношении

$$\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2} = \frac{1}{\nu} + \lambda^2,$$

(2.104)

НЕ КОПИРОВАТЬ

связывающем параметры ω_c, v, λ^2. Действительно, рассматриваемая задача отыскания параметров законов распределения $f(\omega)$ эквивалентна в силу (2.103) отысканию экстремума выражения

$$H = -\ln c - v\lambda^2 \to \max;$$

(2.105)

при ограничениях

$$\lambda^2 = \int_0^{\omega_c} \frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2} c e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega;$$

(2.106)

или после подстановки формул (2.106), в выражение (2.105)

$$H = \ln \int_0^{\omega_c} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega - \frac{v\int_0^{\omega_c} \frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega}{\int_0^{\omega_c} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega} \to \max_{\omega_c}.$$

Тогда с учетом того, что

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_c} = 0$$

после некоторых преобразований несложно получить

$$\int_0^{\omega_c} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega - v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega_c^2}\int_0^{\omega_c} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega + v\int_0^{\omega_c} \frac{1-\cos\omega\tau}{\omega_c^2} e^{v\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}} d\omega = 0.$$

(2.107)

Это соотношение позволяет для установления связи между множителем Лагранжа v, частотой среза ω_c и параметром λ^2 применить любую итеративную процедуру, обеспечивающую выполнение условия (2.100), условия нормировки и сходимость процесса. Более удобные для анализа зависимости можно получить, если перейти к приведенным параметрам $\lambda_{\text{пр}}^2 = \frac{\lambda^2}{\tau^2}$; $v_{\text{пр}} = vt_0^2$; $x_c = \omega_c\tau$.

Численный анализ плотностей распределений величины $x = \omega\tau$, полученные по зависимости

$$f(x) = c e^{v_{\text{пр}}\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

(2.108)

показывает, что в области малых значений параметра $\lambda_{\text{пр}}^2$ значение приведенной «частоты» среза x_c стремится к $x_c = 2\pi$, а множитель Лагранжа $v_{\text{пр}}$ к бесконечности. В этом случае закон распределения случайной величины x вырождается в δ-функцию Дирака в окрестности точки $x_c = 2\pi$. Изменению параметра $\lambda_{\text{пр}}^2$ в интервалах (0,1;0,43)

НЕ КОПИРОВАТЬ

характерно плавное изменение величин x_c и $v_{\text{пр}}$. По мере увеличения $\lambda_{\text{пр}}^2$ (при $\lambda_{\text{пр}}^2 > 0{,}43$) закон распределения параметра x приближается к равномерному и при $\lambda_{\text{пр}}^2$, стремящемуся к 0,5, вырождается в δ-функцию Дирака в окрестности точки $x_c = 0$.

Представление случайной величины в рамках корреляционной теории в виде (2.95) постулирует произвол в выборе законов распределения параметров λ_1 и λ_2.

Это обстоятельство порождает неопределенности при моделировании процесса и при определении (расчете) некоторых характеристик процесса. Очевидно, что с помощью принципа максимума энтропии эту неопределенность можно преодолеть. Рассмотрим такой подход на примере определения закона распределения экстремума случайной функции (2.95), преобразованной к виду

$$Q(t) = m_Q(t) + \sigma_Q(\cos\omega t + \lambda \sin\omega t).$$

(2.109)

Такое преобразование допустимо, если случайная функция $Q(t) - m_Q(t)$ является стационарной.

Моменту достижения экстремального значения процесса $Q(t)$ соответствует условие $dQ/dt = 0$. Тогда при допущении, что $\dot{m}_Q(t) = 0$, из соотношения (2.156) нетрудно получить выражение для условия достижения экстремальных значений

$$t_m = \frac{1}{\omega} arctg \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.110)$$

С учетом зависимости (2.110) максимальные значения координаты процесса могут быть представлены в виде

$$Q_{\max} = m_Q(t_m) + \sigma_Q\left(\sin arctg \frac{1}{\lambda} + \lambda \cos arctg \frac{1}{\lambda}\right)$$

или

$$Q_{\max} = m_Q(t_m) + \sigma_Q\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} + \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}\right),$$

(2.111)

где $Q_{\max}$ – случайная величина.

После несложных преобразований выражение (2.111) преобразуется к виду

$$Q_{\max} = m_\sigma(t_m) + \sigma_Q\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Введем в рассмотрение новую случайную величину

$$\xi = \frac{Q_{\max} - m_Q(t_m)}{\sigma_Q}$$

(2.112)

с неизвестной плотностью распределения $f(\xi)$. Тогда $\xi = \sqrt{1+\lambda^2}$.

НЕ КОПИРОВАТЬ

В выражении (2.159) в силу принятого допущения $m_Q(t_m) = const$.

Для определения $f(\xi)$ представляется целесообразным применить принцип максимума неопределенности. Тогда плотность распределения $f(\xi)$ определяется в результате решения вариационной задачи, где в качестве оптимизирующего функционала выступает энтропия Шеннона. Для формирования изопериметрических условий необходимо использовать ограничения, накладываемые на случайную величину λ, о которой известно, что $m_\lambda = 0, \quad \sigma_\lambda = 1$. В этом случае изопериметрические условия примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda g(\lambda) d\lambda = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 g(\lambda) d\lambda = 1. \qquad (2.113)$$

Взаимосвязь между плотностями распределений случайных величин λ и ξ, связанных соотношением $\xi^2 = 1 + \lambda^2$, устанавливается зависимостью

$$f(\xi) = g(\xi) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

(2.114)

где $g(\xi) = f\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right)$.

Таким образом, рассматриваемая задача редуцируется к виду

$$H_\varepsilon = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} g(\xi) \ln\left[g(\xi) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right] d\xi \to \max,$$

(2.115)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = 1,$$

(2.116)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi g(\xi) d\xi = 0,$$

(2.117)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \sqrt{\xi^2 - 1} g(\xi) d\xi = 1.$$

(2.118)

Необходимо отыскать такую функцию $g(\xi)$, которая при условиях (2.116) – (2.118) обращает функционал (2.115) в максимум. Нетрудно заметить, что в данном случае функция $g(\xi)$, содержащая неопределенные множители Лагранжа v_i может быть вычислена с помощью выражения

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$g(\xi)=\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi}\exp\left(-1+v_1-v_3+v_2\sqrt{\xi^2-1}+v_2\xi^2\right).$$

(2.119)

Тогда искомая функция $f(\xi)$, определяемая соотношением (2.114), примет вид

$$f(\xi)=c\exp\left(v_3\xi^2+v_2\sqrt{\xi^2-1}\right),$$

(2.120)

где c – нормирующий множитель, равный $c=\exp(-1+v_1-v_3)$.

Нетрудно видеть, что плотность распределения случайной величины λ в соответствии с (2.120) имеет вид

$$g(\lambda)=c*\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}e^{v_2\lambda-v_3\lambda^2},$$

(2.121)

где $c*$ – нормирующий множитель.

Для удобства дальнейших преобразований знак v неопределенного множителя Лагранжа v_3 в соотношении (2.121) изменен на противоположный. Представляется также целесообразным множители v_3, v_2 определять из условий (2.113).

Естественно положить в силу симметрии $v_2=0$ (в этом случае условие $m_\lambda=0$ выполняется автоматически), тогда условия (2.113) могут быть представлены в виде

$$1=2c*\int_0^\infty\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}e^{-v_3\lambda^3}d\lambda;$$

$$\lambda=2c*\int_0^\infty\frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda^2+1}}e^{-v_3\lambda^2}d\lambda.$$

(2.122)

Осуществляя подстановку $x=\lambda^2$ и определяя интегралы, преобразуем систему (2.122) к виду

$$1=c*\sqrt{\frac{\pi}{v_3}}e^{v_3}\left[1-\Phi\left(\sqrt{v_3}\right)\right];$$

$$2=\frac{c*}{v_3}+\frac{1}{2v_3},$$

(2.123)

где $\Phi\left(\sqrt{v_3}\right)$ - функция Лапласа.

Из выражений (2.123) следует трансцендентальное уравнение

$$1=\left(2v_3-\frac{1}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{\pi}{v_3}}e^{v_3}\left[1-\Phi\left(\sqrt{v_3}\right)\right]\right],$$

(2.124)

решение которого позволит определить множитель v_3.

В результате решения уравнения (2.124) и системы (2.123) получим следующие параметры закона распределения

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$v_3 = 0{,}8012; \quad c* = 1{,}1024.$$

Используя этот закон распределения, можно показать, что математическое ожидание максимума процесса (2.156)

$$E[Q_{\max}] = m_Q + \sigma_Q 2\int_0^{\infty}\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)c* \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} e^{-v_2{}^2} d\lambda = m_Q + \sigma_Q \frac{c*}{v_3}.$$

(2.125)

Распределение максимума случайной функции (2.109) в силу линейной зависимости $Q_{\max}$ от ξ и с учетом закона распределения $f(\xi)$ является усеченным нормальным распределением

$$\phi(x_{\max}) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sigma} e^{-v_3\left(\frac{x_{\max}-m_x}{\sigma_x}\right)^2}, x > m_x + \sigma_x, \\ 0, x < m_x + \sigma_x, \end{cases}$$

(2.126)

где $c = \dfrac{2\sqrt{v_3}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{1-\Phi\left(\sqrt{v_3}\right)}$ - нормирующий множитель.

2.6. Функции потребительского спроса и информационно-статистические методы их структуризации

Описание поведения совокупного потребителя основано на ряде предположений о правилах выбора потребителем вектора продуктов $P(t)$. Эти правила можно сформулировать с помощью так называемого слабого отношения предпочтения $\geq$ («предпочтительнее, чем …, или равноценен», «не менее предпочтителен, чем …»).

Предварительно поясним содержание некоторых обозначений, принятых в теории предпочтений. Запись $P \geq Q$ означает, что потребитель либо предпочитает вектор P вектору Q, либо не делает между ними различия. Векторы P и Q равноценны (безразличны) для потребителя $(P \sim Q)$, если $P \geq Q$ и $Q \geq P$. Потребитель предпочитает вектор P вектору Q $(P > Q)$, если $P \geq Q$, а отношение $P \sim Q$ несправедливо.

Постулируются следующие свойства отношения предпочтения совокупного потребителя.

1) Для любых неотрицательных векторов P и Q справедливо либо $P \geq Q$, либо $Q \geq P$, либо оба отношения одновременно (потребитель может сравнить любые векторы потребления и определить свое предпочтение или безразличие).

2) Для любых P, Q, R из условий $P \geq Q$, $Q \geq R$ следует $P \geq R$ (транзитивность слабого отношения предпочтения).

3) Для любого P «предпочтительное» множество $\Phi_P = \{Q : Q \geq P\}$ и «непредпочтительное» множество $\Psi_P = \{Q : P \geq Q\}$ замкнуты (предельные переходы не выводят из соответствующего множества).

НЕ КОПИРОВАТЬ

4) Если $P \geq Q$ и $P \neq Q$, то $P > Q$ (увеличение хотя бы одной компоненты*) вектора Q приводит к более предпочтительному вектору P).

5) Если $P \neq Q$ и $Q \geq P$, то для всех чисел $0 < \alpha < 1$ выполняется отношение $\alpha Q + (1-\alpha)P > P$ (движение по отрезку, соединяющему некоторый вектор P с не менее предпочтительным вектором Q, приводит к векторам, более предпочтительным, чем исходный).

Отношение безразличия выделяет в пространстве всех векторов потребления множества (поверхности) безразличия. Поверхность безразличия $I_P = \{Q : Q \sim P\}$ заданному вектору P образуется пересечением множеств Φ_P и Ψ_P.

Из аксиом 1 – 3, следует существование непрерывной скалярной функции $U(P)$, для которой неравенство $U(P_1) \geq U(P_2)$ эквивалентно отношению $P_1 \geq P_2$ в том смысле, что более предпочтительным вектором соответствуют бóльшие значения функции, а равноценным векторам – равные значения, и обратно. Такая функция получила название функции полезности. Она более экономно описывает выбор потребителя, чем исходное отношение предпочтения.

Функцию полезности можно построить, зная отношение предпочтения, а точнее – поверхности безразличия I_P. Эти поверхности объявляются поверхностями уровня функции полезности: $U(P) = const$ для всех $P \in I_P$. Значение константы задается так, чтобы более предпочтительному вектору P_*, маркирующему поверхность безразличия, соответствовало большее значение константы. Таких соответствий можно задать сколько угодно, поэтому одно отношение предпочтения порождает бесконечное множество функций полезности. Все эти функции по построению имеют одинаковые поверхности уровня (но с разными значениями функции на одной и той же поверхности), они могут быть получены из одной функции полезности $U_*(P)$ суперпозицией со строго возрастающей функцией $f(x)$ скалярного аргумента: $U(P) = f[U_*(P)]$. В некоторых построениях функция полезности принимается как исходная, и тогда ее значения трактуются как мера «удовольствия» от потребления различных наборов продуктов.

Аксиома 4 об отношении предпочтения приводит к положительности частных производных функции полезности $\partial U / \partial P_i > 0$ (если она таковыми обладает). Аксиома 5 влечет строгую квазивогнутость U:

$$U[\alpha P + (1-\alpha)Q] > \min\{U(P); U(Q)\} \quad \forall \alpha \in (0,1).$$

Если при этом функция U дважды дифференцируема, то она строго вогнута, т.е. матрица вторых производных $\left\| \partial^2 U / \partial P_i \partial P_j \right\|$ - отрицательно определенная. Отмеченные свойства функции полезности роднят ее с производственной функцией.

Следующий шаг в построении теории потребления – предположение о том, что совокупный потребитель рационально расходует свои денежные средства. В терминах предпочтений это предложение звучит так: потребитель, исходя из уровня цен c_i и своего дохода q, делает такой выбор вектора продуктов с компонентами P_i, который является для него наиболее предпочтительным из всех наборов со стоимостью, равной q. В

* Обычные знаки неравенства при сравнении векторов означают неравенства того же смысла для соответствующих компонент этих векторов.

НЕ ОПИРОВАТЬ

терминах функции полезности такое поведение потребителя записывается как стремление максимизировать полезность:

$$U(P) \Rightarrow \max \quad \text{по } P \text{ при } \sum_{i=1}^{n} c_i P_i = q.$$

(2.127)

Геометрически это означает, что потребитель выбирает вектор P^*, соответствующий точке касания плоскости равной стоимости с некоторой поверхностью безразличия.

В результате решения задачи (2.127) получается вектор-функция $S(c,q)$, связывающая вектор конечного потребления P^* с вектором цен c и доходом q:

$$P^* = S(c,q) = \arg\max_{P} \{U(P) | cP = q\}$$

(2.128)

(после вертикальной черты в фигурных скобках записываются условия, при которых отыскивается экстремум).

Функция (2.127) называется функцией спроса. Она обладает рядом важных свойств [9]:

1) Монотонно возрастающее преобразование функции полезности не изменяет функцию спроса.

2) Однородность нулевой степени:

$$S(\mu c, \mu q) = S(c,q),$$

(2.129)

т.е. спрос не меняется при пропорциональном изменении всех цен и дохода (в отличие от однородности первой степени производственной функции).

3) Условие Слуцкого: если образовать выражения

$$K_{ij}(c,q) = (\partial S_i / \partial c_i) + S_i (\partial S_i / \partial q) \quad (i, j = 1,...,n),$$

(2.130)

то оказывается, что

$$K_{ij}(c,q) = K_{ji}(c,q) \quad (i, j = 1,...,n),$$

(2.131)

Выражение (2.130) именую остаточной изменчивостью потребления i-го продукта при компенсированном изменении цены j-го продукта. Компенсированным называют такое изменение цены c_j, которое сопровождается изменением дохода q, равным изменению расхода на покупку j-го продукта в прежнем количестве S_j по новой цене.

4) Отрицательная определенность квадратичной формы с матрицей $\|K_{ij}\|$

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} y_i y_j \quad \text{при} \quad y_i \neq \gamma c_i$$
$$(\gamma \neq 0 \text{ - скаляр}, \ i = 1,...,n).$$

(2.132)

Все эти свойства выводятся формальными методами как следствия свойств функции полезности. Укажем еще одно свойство функций спроса, установленное непосредственно по экономической статистике.

НЕ КОПИРОВАТЬ

5) Не все эластичности спроса по доходу должны быть единичными: существует такой продукт i, для которого

$$\partial \ln S_i(c,q)/\partial \ln q \neq 1.$$

(2.133)

В противном случае структура вектора спроса не менялась бы с изменением дохода

$$S_i(c,q)/S_j(c,q) = g_{ij}(c), \quad i, j = 1,...,n,$$

а это противоречит экономическим наблюдениям.

В проекции на функцию полезности условие (2.133) означает невозможность описания потребительских предпочтений с помощью однородной функции полезности и это отличает ее от производственной функции.

Приведем теперь пример конкретной функции спроса. Для этого зададим функцию полезности в виде:

$$U(P) = \prod_{i=1}^{n} \left(P_i - P_i^{\circ}\right)^{b_i} \quad \text{или} \quad \overline{U}(P) = \sum_{i=1}^{n} b_i \ln\left(P_i - P_i^{\circ}\right),$$

$$b_i = const > 0, \quad b_1 + b_2 + ... + b_n = 1, \quad P_1^{\circ} = const \geq 0, \; P_i \geq P_i^{\circ}$$

(2.134)

где b_i – параметры, соизмеряющие полезность различных продуктов, P_i° - минимальный уровень потребления.

Функции (2.134) получаются одна из другой монотонно возрастающим преобразованием, поэтому и порождающее их отношение предпочтения и порождаемая ими функция спроса единственны.

Решение задачи (2.127) с функциями (2.134) дает

$$P_i^* = S_i(c,q) = P_i^{\circ} + \frac{b_i}{c_i}\left(q - \sum_{j=1}^{n} c_j P_j^{\circ}\right) \quad (i = 1,...,n).$$

(2.135)

Для этих функций выполняются все пять указанных выше свойств.

Функции (2.135) построены исходя из второго варианта функции полезности (2.134). За основу были взяты следующие предположения, оправдываемые статистикой:

1) по каждому продукту существует минимальный уровень потребления P_i°,

2) минимальный уровень потребления всегда обеспечивается $\left(P_i \geq P_i^{\circ}\right)$,

3) оставшиеся после обеспечения минимального потребления денежные средства распределяются по видам продуктов в фиксированной пропорции.

Параметры b_i, P_i° функции спроса идентифицируются по данным статистики.

Как в экономической, так и социальной теориях различают два подхода к оценке соизмерения различных товаров и услуг: кардиналистский (количественный) и ординалистский (порядковый, качественный).

Количественный подход основан на представлении о возможности измерения полезности различных благ непосредственно в каких-либо единицах полезности (ютилах). Предельная полезность характеризует прирост общей полезности (сумму полезностей) при увеличении объема потребления данного блага на одну единицу. В основе процессов и явлений, формирующих закономерности рыночного спроса в экономике лежит здравый смысл поведения покупателя. В любой данный период каждый покупатель продукта получает меньше удовлетворения (выгоды, полезности) от каждой последующей единицы продукта. Отсюда следует, что потребление подвержено действию принципа убывающей

НЕ КОПИРОВАТЬ

предельной полезности, следствием из которого является то, что потребители будут покупать дополнительные единицы продукта лишь при условии снижения его цены.

При анализе полезности товаров и предпочтений покупателя в экономике исходят из следующего предположения: любое благо распределяется между различными альтернативными целями его использования в таких пропорциях, чтобы предельная полезность при использовании его во всех целях была одинаковой. В формализованном виде это можно записать следующим образом

$$\frac{W_x}{P_x} = \frac{W_y}{P_y} = \ldots = \frac{W_z}{P_z} = \lambda,$$

(2.136)

где W – предельная полезность;

P_x, P_y, P_z – цена товаров x, y, z;

λ – коэффициент пропорциональности предельной полезности его цене.

При проведении экономического анализа и для формирования функции спроса весьма важно знать динамику изменения предельной полезности W_j при увеличении объема потребления на j единиц.

Общий вид таких моделей может быть представлен зависимостью [16,22]

$$W_j = W_0 - bF(j),$$

(2.137)

где W_0 – начальное значение полезности,

$F(j)$ – функция числа объема потребления, характеризующая изменение предельной полезности при увеличении объема потребления на j единиц,

b – параметр процесса.

В частном случае зависимость (2.134) может принимать вид

$$W_j = W_0 - \frac{b}{j}.$$

(2.138)

Основными наиболее распространенными методами оценивания параметров моделей (2.184) могут быть метод максимального правдоподобия (в частном случае метод наименьших квадратов), метод максимальной апостериорный вероятности (байесовский метод) и минимаксный метод.

Условия и процедуры применения этих методов подробно изложены в литературе по математической статистике. Следует заметить, что на использование каждого метода накладываются определенные ограничения. Так, например, использование метода наименьших квадратов ограничивается его чувствительностью к отклонению результатов наблюдений от нормального закона, применение метода максимального правдоподобия характеризуется сложными вычислительными процедурами, байесовский подход требует использования априорной информации, кроме того байесовские оценки не совпадают с оценками максимального правдоподобия при использовании малых выборок, мерой оптимальности оценок в минимаксном методе служат функции потерь, выбор которых неоднозначен. Кроме того, все эти методы с точки зрения прогностики не чувствительны к эффекту дисконтирования.

Трудности, связанные с необходимостью учета дисконтирования и использования нескольких решающих правил, генерируемых применением различных методов,

НЕ КОПИРОВАТЬ

обусловливают потребность поиска другого подхода к решению задачи оценивания параметров моделей.

Для решения задачи оценивания параметров модели с учетом изложенного представляется целесообразным использование информационных критериев. Не нарушая общности рассуждений, можно показателю полезности W придать вероятностное содержание (относительное изменение полезности). Тогда для решения задачи оценивания параметров модели воспользуемся понятием «функции неточности» в виде следующей зависимости

$$h\left(\frac{w}{\hat{w}}\right) = -\sum_{j=1}^{k} w_j \ln \hat{w}_j \ .$$

(2.139)

Зависимость (2.139) может рассматриваться как мера неопределенности знания о состоянии объекта при условии, что это состояние оценивается распределением $\hat{w}_j$, в то время как истинное состояние характеризуется состоянием w_j. В частном случае $\left(w_j = \hat{w}_j\right)$ выражение (2.139) вырождается в энтропию Шеннона. Таким образом, использование функции неточности (2.139) для решения задач оценивания параметров модели можно рассматривать как распространение экстремального принципа формирования закона распределения на соответствующий класс задач.

Использование функции неточности основывается на том, что разность

$$\tilde{H} = -\left(\sum_{j=1}^{k} w_j \ln \hat{w}_j - \sum_{j=1}^{k} w_j \ln w_j\right) = -\sum_{j=1}^{k} w_j \ln \frac{\hat{w}_j}{w_j}$$

(2.140)

можно рассматривать как меру погрешности при замене истинного значения w_j их оценкам $\hat{w}_j$. Обратимся к задаче оценивания параметров модели при условии использования в качестве критерия функционала (2.140).

Пусть оценка параметров производится по результатам k серий $\left(j =,...,k\right)$ наблюдений за изменениями полезности, каждой из которых соответствует неизвестное значение показателя полезности.

В качестве модели процесса сначала рассмотрим относительно простое уравнение (2.135). В этой зависимости только два неизвестных параметра - b и W_0, которые подлежат определению. Тогда задача сведется к отысканию таких оценок этих параметров, при которых достигается экстремум (минимум) функционала (2.140). Предварительно заметим, что

$$w_j = W_{j+1} - W_j \ ,$$

следовательно,

$$w_j = \frac{b}{j\left(j+1\right)}.$$

(2.141)

Подставляя (2.140) в (2.139), получим функционал неточности в виде

$$\tilde{H} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{b}{j(j+1)} \ln \frac{j(j+1)}{b}.$$

(2.142)

Для отыскания неизвестного параметра b достаточно продифференцировать это выражение и приравнять полученное соотношение нулю. После необходимых преобразований получим

$$\frac{d\tilde{H}}{db} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} \ln \frac{j(j+1)}{be} = 0.$$

(2.143)

Отсюда следует, что

$$b = \exp\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} \ln \frac{j(j+1)}{e}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)}} \right\}.$$

(2.144)

Для определения значения W_0 можно поступить следующим образом. Задаться значением W_j в характерной точке, после чего из уравнения (2.135) установить величину W_0. В качестве таких характерных точек можно принять $j = k$, соответственно $W_j = W_k$ (в этом случае аппроксимирующая зависимость проходит через конечную точку и эффект дисконтирования исключается); $j = 1$, в этом случае зависимость проходит через начальную точку; и точку, в которой достигается $w_j = \max(W_{j+1} - W_j)$.

Возможно использование совместно с рассматриваемым методом и метода наименьших квадратов. Такой подход, как нетрудно заметить, даст следующий результат:

$$W_0 = \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} \hat{W}_j + b \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right).$$

(2.145)

Таким образом, применение рассматриваемого экстремального принципа для определения параметров модели дает решение задачи с точностью до одного свободного члена. В силу свойств рассматриваемого информационного критерия выбор этих параметров не оказывает влияния на значение оптимизируемого параметра. Для определения свободного параметра представляется целесообразным использовать дополнительные условия (граничные условия, условие минимума квадрата отклонений и др.).

При построении моделей убывающей предельной полезности в экономике необходимо учитывать наличие фактора неопределенности и ограниченную возможность использования экспериментальных данных. Когда отсутствует количественная информация о приросте полезности при увеличении объема потребления данного блага на одну единицу, можно применить ординалистский (порядковый) подход к оценке прироста полезности и упорядочить по степени предпочтения возможную оценку потребителем полезности при покупке дополнительных благ

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$A_1 \succ A_2 \succ ... A_n,$$

(2.146)

означающую, что покупка каждой дополнительной единицы продукта вносит меньше прирост в общую сумму полезностей, реализуемую при покупке n единиц.

Количественную оценку степени предпочтения (2.146) дают так называемые оценки Фишборна

$$\hat{P}_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}, i = 1,...,n,$$

(2.147)

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{P}_i = 1.$$

(2.148)

Очевидно, что эти оценки можно рассматривать в качестве вероятностей перехода из состояния A_1 за один шаг (за одну покупку) в состояние A_2 и т.д. и интерпретировать этот процесс в терминах теории марковских цепей (моделировать реализацию убывающей предельной полезности по схеме марковских случайных процессов).

Справедливость соотношения (2.147) вытекает из следующего. Рассматриваемая информационная ситуация характеризуется неопределенностью и требует использования энтропийного подхода. С этой целью вводится в рассмотрение мера неопределенности второго рода

$$H_2(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{n-i+1},$$

(2.149)

являющаяся чувствительной при решении экстремальных задач при ограничениях, заданных неравенствами.

Функция неопределенности второго рода обладает тем свойством, что ее максимум для простого отношения порядка (2.146) достигается на оценках (2.147).

Действительно, решая задачу на условный экстремум

$$H_2(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{n-i+1} \to \max_{p_i},$$

(2.150)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

(2.151)

при условии

$$p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_i \geq ... \geq p_n$$

(2.152)

с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, можно найти экстремальные оценки (2.147).

Применение дискретных марковских цепей в микроэкономике для моделирования процесса убывания предельной полезности имеет некоторую специфическую особенность, которая заключается в том, что число переходов из одного состояния в другое является величиной случайной. Постановка и решение задачи определения состояния процесса в терминах марковских цепей заключается в следующем.

НЕ КОПИРОВАТЬ

Пусть вектор начальных вероятностей определяется вектор-строкой $\pi(0)$ и, пусть далее осуществляется случайное число r переходов из состояния A_i в A_j, закон распределения которого $P_n = P(r = n), n = 0,1,...$- (случай бесконечного числа переходов не исключается). Требуется определить вероятности состояний $\pi(n)$, осредненные по всей совокупности возможных вариантов числа переходов $E[\pi(n)]$.

При детерминированном числе переходов

$$\pi(r) = \pi(0)\Pi^r,$$

(2.153)

где $\Pi = \|p_{ij}\|$ – стохастическая матрица переходов.

При случайном r осредненная вектор-строка определяется следующим образом

$$E[\pi(n)] = \pi(0)\sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pi^n.$$

(2.154)

Заметим, что Π - квадратная матрица, а n - натуральное число, следовательно,

$$E[\pi(n)] = \pi(0)\left[p_0 E_0 + p_1\Pi + p_2\Pi^2 + ...\right],$$

(2.155)

где E_0 – единичная матрица.

Так, например, если закон распределения числа переходов описывается законом Пуассона

$$p_n = \frac{v^n e^{-v}}{n!},$$

(2.156)

где v - среднее число переходов, то

$$E[\pi(n)] = \pi(0)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n e^{-v}}{n} \Pi^n.$$

(2.157)

Рассматриваемую проблему можно описать и следующей моделью. Функция полезности характеризуется уменьшением прироста совокупной потребительской полезности от каждой дополнительной единицы приобретаемого товара. Количественную оценку уменьшения прироста можно определить из следующих соображений. При достаточно большом числе наблюдений можно оценить среднее число единиц товара, приобретаемого покупателем, или, по статистическим данным, среднее число товаров, приходящихся на одного покупателя. На основе принципа максимума неопределенности определение вероятности того, что покупатель купит n товаров $p_n = P(r = n), (n = 0,1,2,...)$, определяется в результате решения следующей экстремальной задачи.

$$H = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n \to \max_{p_n},$$

(2.158)

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n ,$$

(2.159)

$$\overline{m} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n ,$$

(2.160)

где $\overline{m}$ - среднее число покупок (или товаров, приходящихся на одного покупателя).

С этой целью введем неопределенные множители Лагранжа λ_1 и λ_2 и исследуем на экстремум следующую функцию

$$L = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n + \lambda_1 \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \right) + \lambda_2 \left(\overline{m} - \sum_{n=0}^{\infty} np_n \right).$$

А так как

$$\frac{\partial L}{\partial p_n} = -\ln p_n - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 n = 0,$$

то

$$p_n = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 n}$$

или

$$p_n = p_0 e^{-\lambda_2 n}.$$

(2.161)

Для определения неизвестных параметров (p_0 и λ_2) используем ограничения, накладываемые на случайную величину

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 e^{-\lambda_2 n},$$

$$\overline{m} = \sum_{n=0}^{\infty} np_0 e^{-\lambda_2 n}.$$

Правая часть первого соотношения представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии и может быть представлена в виде

$$1 = p_0 \frac{1}{1 - e^{-\lambda_2}},$$

правая часть второго соотношения – сумму арифметико-геометрической прогрессии

$$\overline{m} = \frac{p_0 e^{-\lambda_2}}{\left(1 - e^{-\lambda_2}\right)^2}.$$

Отсюда следует система уравнений

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$p_0 = \frac{1}{\overline{m}+1},$$

$$\lambda_2 = \ln\left(\frac{\overline{m}+1}{m}\right).$$

Подстановка значений p_0 и λ_2 в формулу (2.208) дает следующее соотношение

$$P(r=n) = \frac{1}{(\overline{m}+1)}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n.$$

(2.162)

Таким образом, случайная величина r (число покупаемых товаров) подчиняется геометрическому распределению

$$P(r=n) = p(1-p)^n$$

(2.163)

с параметром распределения $p = (\overline{m}+1)^{-1}$ и, следовательно, количественная оценка степени предпочтения потребителя (2.147) зависит от случайной величины n.

В связи с этим представляется целесообразным модифицировать оценку (2.147). Для решения такой задачи необходимо воспользоваться аппаратом производящих функций.

Если случайная величина r принимает только целые неотрицательные значения, то производящей функцией распределения называется функция комплексного переменного

$$f(t) = E\left[t^r\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^r p_n(r=n), |t| \le 1.$$

(2.164)

По производящей функции распределение восстанавливается однозначно по формуле

$$P_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)\big|_{t=0},$$

(2.165)

где $f^{(n)}(t) = \dfrac{d^n}{dt^n} f(t).$

Для рассматриваемого случая с учетом рандомизации величины n по геометрическому распределению производящая функция определяется следующим образом

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} t^i \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)} \frac{1}{(\overline{m}+1)}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n$$

(2.166)

или после несложных преобразований

$$f(t) = \frac{2}{\overline{m}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(t^i - it^i \frac{1}{n+1}\right).$$

(2.167)

Используя зависимость (2.165), последовательно находим

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$P_1 = \frac{2}{\overline{m}+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n \frac{1}{n+1},$$

$$P_2 = \frac{2}{\overline{m}+1}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n \frac{(n-1)}{(n+1)n} \quad \text{и т.д.}$$

В общем виде

$$P_k = \frac{2k!}{\overline{m}+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}\right)^n \frac{(n-k+1)}{(n+1)n}\ .$$

(2.168)

Так, например, если $\overline{m}=1$ и предельную полезность $(n \to \infty)$ принять за единицу (100%), то вклад (прирост) совокупной полезности после покупки первой единицы товара составит 25%, второй уже только 4.6% и т.д. При $\overline{m}=0.5$ (менее насыщенный рынок товаров) уже $P_1 = 0.28, \quad P_2 = 0.015$ и т.д.

Объектом изучения экономики являются конкретные экономические единицы (системы) и закономерности их поведения. Осуществляя экономический анализ с «близкого расстояния», приходится столкнуться с тем обстоятельством, что протекающие в этих объектах элементарные процессы неизвестны. Такие системы, в которых оказывается невозможным разграничить различные по своей природе явления (чисто технические вопросы и влияние интеллекта человека, например) называются диффузными. Изучение диффузных систем оказало влияние на методологическую концепцию формирования требований, предъявляемых к математическому описанию наблюдаемых явлений. В связи с этим представляется целесообразным понятие закона в рассматриваемой области заменить противоположным с кибернетической точки зрения понятием модель. Такое противопоставление обусловливает снижение требований, предъявляемых к математическому описанию наблюдаемых явлений (закон в науке имеет характер некоторой абсолютной категории на данном уровне знаний, он может быть либо безусловно верен, либо безусловно неверен, и тогда отвергается). Совсем иные требования предъявляются к математической модели, применяемой для описания диффузной системы. Математическая модель может давать лишь определенное и утилитарное представление о поведении диффузной системы. Различные исследователи могут предлагать различные математические модели для описания одной и той же системы. Вполне очевидно, что для их дискриминации необходимо учитывать логическую обоснованность исходных постулатов и содержательность. Это значит, что математическая модель должна опираться на данные экспериментов (наблюдений), объяснять уже известные факты, выявлять новые и нести информационную нагрузку (выдвигать новые проблемы, предсказывать дальнейшее поведение системы и др.).

В этом смысле для математического описания обратной связи между ценой товара и объемом спроса представляется целесообразным воспользоваться логистической моделью и той информацией, которая может быть определена в результате наблюдения за квазиравновесным состоянием рынка (статистически равновесными состояниями между ценой и спросом).

При описании эволюции самых разнообразных взаимодействующих объектов широко используется система обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра вида

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} N_j\right),$$

(2.169)

где N_i – количественная мера i-ой группы взаимодействующих объектов;

b_i и a_{ij} – постоянные, характеризующие эволюцию i-ой группы объектов в отсутствие других конкурирующих объектов;

(a_{ij}) – матрица взаимодействия.

Такого рода уравнения встречаются в исследованиях по кинетике химических реакций, динамике экосистем, активности нейронов, астрофизике и др.

При моделировании процессов в математической экономике система уравнений Лотки-Вольтерра может быть использована для описания и исследования процессов устойчивости процессов взаимодействия взаимодополняющих товаров в условиях динамического рынка. На основе уравнений вида (2.169) представляется возможным конкретизировать аналитический вид кривой спроса.

На формирование рыночного спроса оказывает влияние ряд факторов (вкусы и предпочтения потребителей, цены на сопряженные товары, денежные доходы потребителей и их число на рынке и др.). Отвлекаясь от неценовых детерминант, и при прочих равных условиях объем товара спроса уменьшается, если цена товара p растет. Следовательно, трансформируя уравнение (2.169), можно постулировать, что кривая рыночного спроса $q(p)$ будет определяться уравнением вида

$$\frac{dq}{dp} = -q(b - aq).$$

(2.170)

Интегрируя уравнение (2.170), находим, что зависимость объема рыночного спроса от цены товара p при прочих равных условиях описываются логистической функцией

$$q = \frac{\frac{b}{a}}{1 - \left(1 - \frac{b}{aq_0}\right)e^{b_p}}, \qquad (2.171)$$

где q_0 – максимальное значение объема спроса, соответствующее минимальной цене товара.

Очевидно, что изменение одной или более из детерминант спроса вызовет сдвиг кривой (2.171). Иными словами, коэффициенты логистической кривой (2.171) являются сложными функциями параметров, характеризующих детерминанты спроса. Использование статистических методов для определения значений a и b ограничивается динамичностью рыночных отношений и тем обстоятельством, что статистическое обследование поля «$q - p$» ограничено малой областью, близкой к квазиравновесному состоянию экономических показателей объема спроса и цены товара.

В связи с этим с целью проведения экспресс-анализа рыночного спроса и расширением прогнозических возможностей кривой спроса представляется целесообразным для определения коэффициентов логистической кривой использовать информацию о ценовой эластичности спроса и статистическую информацию о спросе и цене в области квазиравновесного состояния системы «объем спроса – цена товара».

НЕ КОПИРОВАТЬ

С математической точки зрения коэффициент ценовой эластичности E_d представляет собой относительную производную объема спроса по цене

$$E_d = \left(\frac{dq}{dp} \frac{p}{q} \right)_{\substack{p=\bar{p} \\ q=\bar{q}}},$$

(2.172)

определенную для какой-либо характерной точки кривой спроса $(\bar{p}, \bar{q})$.

Таким образом, с учетом дифференциального уравнения (2.167) коэффициент ценовой эластичности E_d может быть связан с параметрами логистической кривой a и b следующим образом.

Заметим, что в результате статистического анализа объема спроса и цены товара для стационарной точки квазиравновесного состояния системы «объем спроса – цена товара» могут быть определены средние значения параметров $\bar{p}$ и $\bar{q}$, их дисперсии σ_p^2 и σ_q^2 и коэффициент корреляции r_{pq}, тогда коэффициент ценовой эластичности следующим образом

$$E_d = r_{pq} \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \frac{\bar{p}}{\bar{q}}.$$

(2.173)

Если имеется надежная оценка параметра q_0, то для определения констант логистической модели a и b достаточно использовать соотношение (2.171) и функцию (2.168), задав независимой переменной $\bar{p}$ и функции от нее $\bar{q}$ среднее значение $\bar{p}$ и $\bar{q}$ квазиравновесного состояния системы.

Выскажем некоторые соображения о привлечении дополнительной информации, позволяющей для модели (2.161) произвести оценку параметра q_0.

Устойчивость рыночной ситуации определяется характером взаимодействия функции спроса и функции предложения. Заметим, что функцию предложения можно также описать логистической кривой исходя из тех же феноменальных соображений. Очевидно, что наиболее устойчивое положение в динамике взаимодействия цены и спроса будет достигаться в той точке пересечения кривых спроса и предложения, в которых они имеют наибольшие производные (наибольшую чувствительность к воздействию возмущающих факторов). Рынок автоматически будет адаптироваться к устойчивому состоянию.

Эти соображения позволяют в качестве дополнительного («дисциплинирующего», по терминологии исследования операции) использовать экстремальный принцип.

Максимальное значение производной логистической функции, как это нетрудно определить из уравнения (2.170), достигается в точке, которой соответствует условие

$$\bar{q} = \frac{b}{2q}.$$

(2.174)

Поэтому совместное решение уравнений (2.100), (2.174) и логистического уравнения (2.168), удовлетворяющего параметрам $\bar{p}$ и $\bar{q}$, дает следующий результат

НЕ ТИРОВАТЬ

$$q_0 = \frac{2\bar{q}}{1+e^{2E_d}},$$

(2.175)

$$a = -\frac{E_d}{\bar{p}\bar{q}},$$

(2.176)

$$b = -\frac{2E_d}{\bar{p}}. \qquad (2.177)$$

Кривая спроса в этом случае будет иметь вид

$$q = \frac{2\bar{q}}{1+e^{2E_d\left(1-\frac{p}{\bar{p}}\right)}}. \qquad (2.178)$$

Заметим, что ценовая эластичность является величиной отрицательной, поэтому максимальный объем спроса, оцениваемый с помощью модели (2.178), будет меньше, чем в 2 раза того значения, которое наблюдается в установившемся состоянии рынка.

При $p \to 0$ из уравнения (2.178) следует $q \to q_0$, при $p \to \infty$ объем спроса q стремится к нулю, а при $p = \bar{p}$ уравнение (2.178), естественно, вырождается в тождество.

Объем спроса товара зависит не только от цены, но и от ряда других факторов. Формирование спроса на рынке существенным образом определяется в значительной степени наличием взаимозависящих (конкурирующих) товаров. Для описания процесса взаимодействия объемов спроса на такие товары с целью прогнозирования представляется целесообразным использовать аналитические модели.

Основной вопрос, который решается при построении аналитических моделей, состоит в установлении связи между возможными состояниями системы и теми изменениями, которые в ней происходят.

Наиболее общим видом аналитических моделей является система дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, v, t) \end{aligned}\right\},$$

(2.179)

соответствующая схеме взаимодействий друг на друга двух конкурирующих видов товаров.

В системе (2.179) приняты следующие обозначения: x_1, x_2 - средние значения объемов спроса на товары, u, v - управления.

Физический смысл управлений может быть различным в зависимости от целей исследования (например, изменение цены, улучшение потребительских свойств и др.). Уравнения подобного рода получили название уравнений динамики средних и нашли довольно широкое распространение при описании вооруженной борьбы, экологических процессов и т.д. Достоинством моделей этого класса является удобство анализа получаемых на их основе результатов и учета влияния каждого фактора из числа учитываемых на ход и исход процесса (возможность получать решения в обозримом виде). Недостатком этих моделей является необходимость проведения большой подготовительной работы для их построения.

НЕ КОПИРОВАТЬ

При построении модели взаимодействия объемов спросов двух конкурирующих видов товаров воспользуемся следующими допущениями.

1. Состав каждой группы товаров является однородным по целевому назначению и имеет начальное значение X_{01} и X_{02}.

2. Процесс реализации товаров представляет собой пуассоновский поток, пополнение состава группы товаров не производится.

3. Каждая единица товара стороны S_1 эквивалентна единице товара стороны S_2 (покупатель выбирает или товар X_{01}, или X_{02}).

4. Временем реализации единицы товара можно пренебречь по сравнению с общей продолжительностью реализации всей совокупности товаров.

5. В любой момент времени суммарная численность товаров каждой стороны пропорциональна не случайному числу оставшихся товаров, а его средним значениям (математическому ожиданию).

Для вывода уравнений введены следующие обозначения:

X_1 – среднее число единиц товара стороны S_1, реализованных к моменту t;

X_2 – тоже для стороны S_2;

λ_1 – единичный объем спроса для стороны S_1 $\lambda_1 = \dfrac{Q_{DX}}{X_1(0)}$;

Q_{DX} – объем спроса на товар в единицу времени;

λ_2 – единичный объем спроса для стороны S_2.

Для произвольного момента времени t «приращение» величины X_1 за время Δt составит

$$\Delta X_1 = -\lambda_2 X_1 \Delta t$$

(величина X_1 за время Δt уменьшается на величину, равную среднему числу реализованных товаров X_2).

Осуществляя предельный переход $\Delta t \to 0$, получим

$$\dot{X}_1 = -\lambda_2 X_2;$$

$$\dot{X}_2 = -\lambda_1 X_1.$$

(2.180)

Система уравнений (2.180) допускает обобщения и решение задачи сопоставления потребительских свойств товаров.

Потребительские свойства конкурирующих видов товаров могут быть оценены как с помощью обобщенных, так и частных показателей. Обобщенная оценка потребительских свойств товаров требует такого информационно-методического обеспечения, которое позволяло бы учесть всю совокупность основных качественных и количественных характеристик, определяющих потребительский облик товара и его взаимосвязь с другими взаимодополняющими товарами и системой сервисного обслуживания.

Одним из обобщенных показателей потребительской эффективности товаров является коэффициент соизмеримости. Коэффициент соизмеримости может быть получен в процессе моделирования или анализа рыночного спроса путем замены некоторого количества товаров X_2 таким же количеством товаров X_1, принятых за базовые (эталонные), которое обеспечивает в целом потребность рынка. В этом случае коэффициентом соизмеримости рассматриваемого товара будет отношение числа

НЕ КОПИРОВАТЬ

введенных эталонных единиц товара X_1 к числу выведенных X_2. Далее постараемся конкретизировать основные принципы применения математического моделирования для расчета обобщенных коэффициентов соизмеримости конкурирующих видов товаров.

Рассмотрим простейшую динамическую модель взаимодействия двух видов товаров X_1 и X_2 (2.180).

Предположим, что для товара X_2 существует обобщенный коэффициент соизмеримости (в качестве эталона будет взят товар X_1). Тогда справедливо следующее представление

$$X_2 = bX_1.$$

(2.181)

Используя соотношение (2.181), систему дифференциальных уравнений (2.180) можно записать в виде

$$\dot{X}_1 = -\lambda_2 X_2 b;$$
$$b\dot{X}_2 = -\lambda_1 X_1.$$

(2.182)

Сопоставление коэффициентов в дифференциальных уравнениях позволяет определить коэффициент соизмеримости следующим образом

$$b = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{Q_{DX_1}}{Q_{DX_2}} \frac{X_{02}}{X_{01}}}.$$

(2.183)

Таким образом, обобщенный коэффициент соизмеримости товаров по потребительским свойствам определяется как корень квадратный из отношения объемов спроса и отношения первоначальных численностей.

На основе уравнений (2.180) могут быть составлены модели динамики рыночного спроса многочисленных групп разнотипных товаров, осуществляющих друг на друга конкурирующее или стимулирующее воздействие.

Так, например, динамика рыночного спроса двух конкурирующих групп товаров $S_1(X_i)$ и $S_2(Y_j)$, исходного состава.

$$X_{0i}, (i = 1,\ldots,n) \text{ и } Y_{0j}, (j = 1,\ldots,m)$$

может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \alpha_{ij} + u_i;$$
$$\frac{dy_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{m} \mu_{ji} x_i \beta_{ji} + v_j; \qquad (2.184)$$
$$i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,m,$$

в которой параметры $\alpha_{ij}(\beta_{ji})$ характеризуют долю товаров $j(i)$-го типа сторон $S_2(S_1)$, выделенных для вытеснения с рынка товаров $i(j)$-го типа, параметры $u_i(v_j)$ - интенсивности поступления товаров на рынок, обобщенные коэффициенты спроса λ_{ij}, μ_{ji} определяют число реализованных товаров $i(j)$-го типа стороны $S_1(S_2)$ в единицу времени.

НЕ КОПИРОВАТЬ

Динамическая модель (2.184) позволяет ввести коэффициенты соизмеримости для целой группы взаимозависимых и взаимозаменяющих товаров.

Так, например, пусть сторона S_1 имеет n типов товаров, а сторона S_2 -m типов товаров, численные значения которых обозначены через $x_i(i=1,...,n)$ и $y_j(j,...,m)$ соответственно. Рыночное воздействие сторон описывается динамической моделью, которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} y_j \alpha_{ij},$$
$$\frac{dy_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} \mu_{ji} x_i \beta_{ji}.$$

(2.185)

В условиях рассматриваемой общей задачи справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение</u>. Если существуют коэффициенты соизмеримости $a_i(i=1,...,n)$ и $b_j(j=1,...,m)$ для товаров сторон S_1 и S_2 соответственно, то эти коэффициента определяются из следующей системы уравнений

$$\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{n} a_i \lambda_{1j} \alpha_{1j} = \frac{1}{a_1}\sum_{j=1}^{m} b_j \mu_{ij} \beta_{1j},$$
$$\frac{b_j}{b_1}\sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_{1j} \alpha_{1j} - \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_{ji} \alpha_{ij} = 0,$$
$$\frac{a_i}{a_1}\sum_{j=1}^{m} b_j \mu_{1j} \beta_{1j} - \sum_{j=1}^{m} b_j \mu_{ij} \beta_{ij} = 0,$$
$$i = 1,...,n; \quad j = 1,...,m.$$

(2.186)

<u>Доказательство утверждения</u>. Действительно, если существуют частные коэффициенты соизмеримости a_i и b_j, то обобщенные товарные потенциалы сторон могут быть представлены следующим образом

$$z_1 = a_1 x_1 + ... + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$
$$z_2 = b_1 y_1 + ... + b_m y_m = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j.$$

(2.187)

Дифференцируя z_1 и z_2 по времени и исследуя систему (2.185), запишем дифференциальные уравнения для потенциалов

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\frac{dz_1}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} y_j \alpha_{ji},$$
$$\frac{dz_2}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} x_i \beta_{ij}.$$

(2.188)

С другой стороны, исчисление торговых потенциалов сторон в эквивалентных единицах позволяет процесс взаимодействия товаров на рынке описать следующей системой уравнений, аналогичной (2.180)

$$\frac{dz_1}{dt} = -\Lambda z_2,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = -\Lambda z_1,$$

(2.189)

где Λ - эффективный объем спроса в эквивалентном исчислении.

Не нарушая общности рассуждений, выразим численность x_1 и y_2 из отношения (2.187)

$$x_1 = \frac{z_1}{a_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} x_i,$$
$$y_1 = \frac{z_2}{b_1} - \sum_{j=2}^{m} \frac{b_j}{b_1} y_j.$$

(2.190)

С учетом (2.190) система дифференциальных уравнений (2.188) может быть представлена следующим образом

$$\frac{dz_1}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{1i} \alpha_{1i} \frac{z_2}{b_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{1i} \alpha_{1i} \sum_{j=2}^{m} \frac{b_j}{b_1} y_j - \sum_{j=1}^{n} a_i \sum_{j=2}^{m} \lambda_{ji} \alpha_{ji} y_j;$$
$$\frac{dz_2}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} b_j \mu_{1j} \beta_{1j} \frac{z_1}{a_1} + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu_{1j} \beta_{1j} \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} \beta_{ij} x_i;$$

(2.191)

сопоставление (2.191) и (2.189) подтверждает справедливость системы уравнений (2.183). Можно показать, что система (2.186) допускает определение коэффициентов соизмеримости с точностью до одного свободного коэффициента, который может быть принят равным единице для товара, взятого в качестве базового («эталона»).

Чтобы вскрыть более глубокие закономерности процесса формирования рыночного спроса системы «товар + взаимозависящий товар + взаимодополняющий товар» и дать более точное описание динамики этого процесса на предположительный период, в основу математической модели необходимо положить дифференциальные уравнения типа обобщенных уравнений логистической модели, учитывающие помимо влияния уже рассмотренных в дифференциальных уравнениях динамики средних факторов, также и ограниченность ресурсов рынка. Аналогичным образом может быть рассмотрена и задача математического моделирования взаимодействия спроса и предложения.

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - \gamma_1 x_1 - a_{12}x_2 + b_{12}x_3),$$
$$\dot{x}_2 = x_2(r_2 - \gamma_2 x_2 - a_{21}x_1),$$
$$\dot{x}_3 = x_3(r_3 - \gamma_3 x_3 - a_{31}x_1).$$

(2.192)

В системе (2.192) коэффициенты a_{12}, b_{12} и т.д. характеризуют конкурирующее или стимулирующее взаимодействие товаров X_1, X_2 и взаимодополняющих товаров X_1, X_3.

Полученные модели учитывают влияние основных факторов на динамику спроса на рынке, являются наиболее общими, но требуют привлечения достаточно надежной статистической информации для определения системы коэффициентов.

Коэффициенты r и γ характеризуют возрастание спроса по мере накопления товаров и исчерпания ресурсов рынка по мере его насыщения. В идеализированной изолированной системе для одного товара установившееся значение спроса равно $\frac{r}{\gamma}$.

Изучение общих моделей динамики рыночного спроса взаимозависимых и взаимодополняющих товаров встречает затруднения аналитического и вычислительного характера. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопросы построения решений систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику спроса в наиболее общем случае. Для решения этой задачи представляется целесообразным использование специального класса операторных рядов (рядов С.Ли), допускающих получение аналитических решений для большого круга задач динамики спроса.

Решение общей (неавтономной) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x_i, t); (i = 1,...,n)$$

(2.193)

с начальными условиями $(x_i)_{t=0} = x_{0i}$, в окрестностях которых функции $V_i(x_i, t)$ являются аналитическими, может быть представлено при помощи следующих рядов

$$x_i = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v x_i\big|_{t=0},$$

(2.194)

где оператор D имеет вид

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + V_1(x_i, \tau)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + V_n(x_i, \tau)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику спроса трех видов товаров (2.192) и имеющих начальные численности X_{01}, X_{02}, X_{03}. Для реализации предлагаемого метода построения решений запишем оператор преобразования D

$$D = x_1(r_1 - \gamma_1 x_1 - a_{12}x_2 + b_{12}x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2(r_2 - \gamma_2 x_2 - a_{21}x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3(r_3 - \gamma_3 x_3 - b_{31}x_1)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

(2.195)

Нетрудно заметить, что

$$D^1 x_1 = x_1(r_1 - \gamma_1 x_1 - a_{12}x_2 + b_{12}x_3)$$

НЕ КОПИРОВАТЬ

$$D^2 x_1 = x_1^2 (r_1 - \gamma_1 x_1 - a_{12} x_2 + b_{12} x_3)^2 (-\gamma) +$$
$$+ x_2 (r_2 - \gamma_2 x_2 - a_{21} x_2)(-a_{12}) + x_3 (r_3 - \gamma_3 x_3 - b_{31} x_1) b_{12}$$

и т.д.

Вычисление последующих значений не вызывает принципиальных затруднений. Тогда легко показать, что решение системы уравнений (2.192) будет иметь вид

$$x_1(t) = x_{01} + t[x_{01}(r_1 - \gamma_1 x_{01} - a_{12} x_{02} + b_{12} x_{03})] +$$
$$+ \frac{t^2}{2}\left[x_{01}^2 (r_2 - \gamma x_{01} - a_{12} x_{02} + b_{12} x_{03})^2 (-\gamma) +\right.$$
$$\left. + x_{03}(r_3 - \gamma_3 x_{03} - a_{12} x_{01})(-a_{12}) + x_{03}(r_3 - \gamma_3 x_{03} - b_{13} x_{01})\right] + \ldots$$

Аналогично могут быть представлены и другие соотношения для расчета $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

Учитывая, что число коэффициентов взаимодействия системы (2.192) равно 10, то достаточно произвести анализ динамики спроса более чем в 3 временных точка для 3 базовых координат, чтобы можно было бы осуществить экспресс-оценку параметров системы дифференциальных уравнений.

Идентификация закономерностей динамики спроса взаимозависимых и взаимозаменяемых товаров в виде соответствующих систем уравнений позволит с их помощью осуществлять прогнозирования рыночного спроса и использовать их в качестве управляемых моделей.

2.7. Моделирование логистических операций по схеме марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непуассоновскими переходами

Предмет исследования логистики – процесс управления целенаправленным движением совокупности ресурсов в среде производства и обмена в целях минимизации издержек обращения. Главной категорией логистики является поток. Поток представляет собой совокупность объектов, воспринимаемую как единое целое, существующую как процесс на некотором временном интервале за определенный период. Совокупность действий, надавливание на преобразование материальных или информационных потоков называется логической операцией. По степени регулярности в логистике потоки делятся на детерминированные и стохастические, последние наиболее полно соответствует концепции как науки. Математическое моделирование стохастических потоков обусловленнно необходимостью управления материальными потоками и оценки качества работы логической системы.

Математический аппарат, разработанный в теории вероятностей для марковских случайных процессов, может быть успешно применен для математического описания стохастических потоков. Схематизация потока в естественных условиях функционирования логистической системы обусловливает применение моделей случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывно марковские цепи). Модели указанного типа основаны на предположении о том, что потоки событий (переходов между состояниями), являются пуассоновскими. Существующие методы сведения реального процесса к схемам, допускающим построение математической модели (например, метод псевдосостояний), обеспечивают соответствие исходной и аппроксимирующей закономерностей с точностью до совпадения математических ожиданий и дисперсий времен перехода этих систем из одного состояние в другое. Достаточно детально моделировать динамику объектов и анализировать влияние вариации потоков событии на оценку эффективности системы может обеспечить метод, базирующийся на рандомизации интенсивности перехода λ и последующем осреднении

вероятностей состояний систем с учетом маргинального (частного) распределения этого параметра.

С целью определения плотности маргинального распределения параметра λ формируется зависимость (интегральное уравнение Фредгольма I рода) с ядром, равным характеристической функции экспоненциального распределения $(1-it\lambda)^{-1}$ и правой частью, равной характеристической функции времени возможного перехода между состояниями $\varphi(t)$

$$\int_0^\infty (1-it)^{-1} f\left(\lambda^{-1}\right) d\lambda^{-1} = \varphi(t)$$

(2.194)

Сущность предлагаемого подхода заключается в целенаправленном преобразовании потоков (непуассоновского в пуассоновский и обратно). Такое преобразование случайного потока событий связано с изменением положения точек на временной оси при сохранении их числа и сопровождается деформацией области существования потока (смещением, нестационарностью и др.). Это обстоятельство открывает возможность построения математических моделей, описывающих эволюцию систем, для которых идеализированная марковская схема в большинстве случаев не подходит.

С математчисекой точки зрения задача отыскания интегрального уравнения (2.194), уравнения Фредгольма I рода, является некорректной (по Адамару), его решение не является устойчивым относительно возмущения правой части уравнения. Применение к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода прямых методов, основанных на аппроксимации интеграла системой линейных уравнений и последующего решения системы, не дает удовлетворительных результатов (вместо истинного решения будет получаться знакопеременная пикообразная ломаная большой амплитуды, которая при ее подстановке в интеграл, тем не менее, даст заданную характеристическую функцию). Поэтому для решения такого рода задач необходимо использовать методы академика А.Н. Тихонова, квазирешений, замены исходного уравнения, близким ему, метод подбора и, если возможно, метод интегральных преобразований. Метод подбора позволяет сузить класс возможных решений уравнений Фредгольма I рода и сделать задачу устойчивой к малым изменениям исходных данных. Кроме того, следует отметить, что сущность рассматриваемого метода анализа стохастических систем с дискретными состояниями и непуассоновскими переходами сводится к осреднению вероятностей нахождения системы в определенном состоянии, получаемых в результате интегрирования уравнений Колмогорова, с учетом функций распределений интенсивностей перехода. Такое осреднение может быть выполнено аналитическим путем или методом Монте-Карло. С этой точки зрения решения, получаемые методом подбора, являются наиболее приспособленными к реализации алгоритмов статистического моделирования.

Сущность метода подбора заключается в следующем. Пусть оператор A есть интегральный оператор

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(z)ds = u(x),$$

(2.195)

где $z(s)$ – искомая функция из пространства F ;

$u(x)$ – заданная функция из пространства U ;

U и F – метрические пространства.

Заметим, что метрическое пространство (F, например) - это множество, в котором каждой паре элементов z_1 и z_2 отнесено число (расстояние) $p(z_i,z_2)$, удовлетворяющее аксиомам метрического пространства (аксиомам тождества, симметрии и треугольника).

При решении уравнения $Az = u$ методом подбора задаются подклассом возможных решений $M(M \subset F)$ и решают прямую задачу (вычисляют оператор Az). В качестве приближенного решения берется такой элемент z_0 из множества M, на котором невязка (расстояние) достигает нижней границы

$$p_u(Az_0, u) = \inf_{z \in M} p(Az_0, u).$$

(2.196)

Для иллюстрации сущности метода подбора проанализируем следующий пример, имеющий следующее значение в терминах транспортной логистики.

Пусть в ходе наблюдений получена, например, выборка интервалов времени на проход шлюза $T_{ш}(k = 1,....,n)$. Установлено также, что математическое ожидание $m_ш$ меньше его среднеквадратического отклонения $\sigma_ш$.

Требуется, используя метод подбора, в классе равномерных распределений найти приближенное решение уравнения (2.194). С этой целью это уравнение, включающее комплексно значащую функцию, предварительно необходимо преобразовать к эквивалентному уравнению с вещественными функциями

$$\int_0^\infty \frac{f(m)}{1 + t^2 m^2} dm = |\phi(t)|,$$

(2.196)

где $|\phi(t)|$ – вещественная часть эмпирической характеристической функции, равная $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos tT_ш$. Предполагая, что подкласс возможных решений M составляет множество равномерных на интервале (m_1, m_2) распределений, вычислим оператор

$$Az \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{(m_2 - m_1)} \frac{1}{(1 + t^2 m^2)} dm = \frac{1}{t(m_2 - m_1)} (\mathrm{arctg} m_2 t - \mathrm{arctg} m_1 t).$$

(2.197)

Если уклонения оценивать в квадратической метрике (метрике L_2)

$$p_u\left(Az, \left|\varphi^0(t)\right|\right) = \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{arctgm_2 t - arctgm_1 t}{t(m_1 - m_2)} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos T_ш \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

(2.199)

то в качестве приближенного решения представляется целесообразным взять плотность равномерного распределения с такими его параметрами $т_1$, и $т_2$,

на которых невязка $p_u\left(Az\left[\varphi^0(t)\right]\right)$ достигает минимума

$$p_u\left(Az\left[\varphi^0(t)\right]\right) = \inf_{\substack{m_1 \in (0,\infty) \\ m_2 \in (m_1,\infty)}} p\left(Az, \left|\varphi^0(t)\right|\right).$$

(2.200)

Задача минимизации невязки принципиальных вычислительных трудностей не вызывает. Существенно может упростить решение задачи следующее естественное условие, которое представляет целесообразным наложить на подкласс возможных решений. Приближенное решение, получаемое методом подбора, должно обеспечивать

соответствие исходной и аппроксимирующей систем с точностью до совпадения математических ожиданий и дисперсий времен перехода этой системы их одного состояния в другое. В этом случае с целью определения параметров распределения *f(m)* необходимо, используя свойство характеристических функций, дважды продифференцировать по *t* уравнение

$$\int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{(m_2 - m_1)} \frac{1}{1-(itm)} dm = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{itT_ш}$$

(2.201)

и вычислить последовательно полученные выражения при t=0. В результате несложно получить следующую систему уравнений

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = m_ш$$

$$\frac{2\left(m_2^3 - m_1^3\right)}{3(m_2 - m_1)} = \sigma_ш^2 + m_ш^2 \quad , \qquad (2.202)$$

связывающую искомые параметры (m_1, m_2) распределения *f(m)* со статическими параметрами выборки интервалов времени нахождения системы в работоспособном состоянии $T_ш$ *(k*= 1,..., *n).*

В качестве подкласса возможных решений уравнения Фредгольма первого рода, в условиях рассмотренной задачи, может быть взято множество модельных распределений (нормальных, экспоненциальных и др.). Прямое решение задачи (вычисление оператора *Az* в этом случае дает следующий результат (в качестве примера рассмотрим множество гаммараспределений, наиболее адаптивным к статистическим данным).

<u>Пример.</u> В классе гамма-распределений найти маргинальное распределение параметра *m*, если информация о времени прохода шлюза представлена выборкой $T_ш$(k=1,..., п).

<u>Решение.</u> При сохранении всех перечисленных условий рассмотрим основное уравнение, которое может быть записано в следующем виде

$$\int_0^{\infty} (1-itm)^{-1} \frac{\lambda(\lambda m)^{s-1} e^{-\lambda m}}{\Gamma(s)} dm = \frac{1}{n} \sum_{k-1}^{n} e^{itT_ш}.$$

(2.203)

Дифференцируя левую и правую части этого уравнения по / и используя свойство характеристических функций, находим

$$\frac{s}{\lambda} = m_ш,$$

$$2\frac{s(s-1)}{\lambda^2} = m_ш^2 + \sigma_ш^2.$$

(2.204)

Решая эту систему уравнений, находим

$$s = \frac{2m_ш^2}{\sigma_ш^2 - m_ш^2} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{m_ш}{\sigma_ш^2 - m_ш^2}.$$

(2.205)

Решения рассмотренных примеров, которых фиксировалось условие $\sigma_ш < m_ш$ получены на основе уравнения (2.194). Для случая $\sigma_ш < m_ш$ требуется использование в качестве ядра уравнения Фредгольма вида (2.194) распределения Эрланга

$$\int_0^{\infty}(1-it\lambda)^{-n} f\left(\lambda^{-1}\right)d\lambda^{-1}=\varphi(t). \qquad (2.206)$$

Таким образом, сведение реального процесса динамики логистической системы процессу, допускающему построение математической модели и обеспечение соответствия показателей исходной и аппроксимирующей систем, можно добиться с помощью метода рандомизации интенсивности переходов, для которых потоки Эрланга редуцируются к потокам Пойа-Лундберга (потокам Эрланга со случайными интенсивностями переходов).

Статистической эквивалентности исходной информации о времени пребывания системы в определенном состоянии можно достичь на основе рандомизации числа псевдосостояний.

Сущность метода «псевдосостояний» состоит в том, что состояния системы, потоки переходов из которых являются немарковскими, заменяются эквивалентной группой фиктивных состояний, потоки переходов из которых являются марковскими. За счет расширения числа состояний системы реальные процессы удается свести к марковским. Созданная таким образом новая система является статистически эквивалентной реальной системе и исследуется с помощью аппарата теории марковских цепей.

К числу процессов, которые введением фиктивных состояний можно свести к марковским, относятся процессы, происходящие под воздействием потоков Эрланга, для которых распределение интервалов времени между событиями подчиняется гамма-распределению

$$f(T)=\frac{\lambda\left(\lambda \mathrm{T}^{-1}e^{-\lambda \mathrm{T}}\right)}{\Gamma(n)} \qquad (2.207)$$

с целочисленным параметром формы n.

Сведение потока Эрланга n-го порядка к пуассоновскому осуществляется введением n псевдосостояний, при этом интенсивности переходов между псевдосостояниями равны соответствующему параметру потока Эрланга, или на основе рандомизации числа псевдосостояний n. Последний переход с вычислительной точки зрения является наиболее приемлемым. Полученный таким образом эквивалентный случайный процесс является марковским, так как интервалы времени нахождения его в различных состояниях подчиняются показательному закону распределения. Заметим, что это можно доказать, суммируя n случайных величин, подчиненных экспоненциальному закону. Принципиально важным является здесь также то обстоятельство, что этот процесс можно описать системой линейных дифференциальных уравнений Колмогорова. Заметим, что метод сведения реальной системы к системе, допускающей использование потока Эрланга и псевдосостояний, обеспечивает соответствие исходной и аппроксимирующей систем с точностью до совпадения математических ожиданий и дисперсий времен перехода. О свойствах генеральной совокупности с функцией распределения $F(T)$ можно судить по ее эмпирическому аналогу (выборке), точнее по свойствам некоторых функций от случайных величин T_1, $T_2,...,T_n$ (по эмпирической функции распределения или его эмпирической характеристической функции).

Заметим, что все возможные варианты задания исходной статистической информации можно свести к единой форме с помощью Фурье-Стилтьеса преобразования функции распределения плотности

$$\phi(t)=\int_0^{\infty}e^{itT} f(\tau)d\tau, \qquad (2.208)$$

а совокупности случайных величин T_1, $T_2,...,T_n$ (выборки) поставить в соответствие эмпирическую характеристическую функцию

$$\phi(t) = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} e^{itT_ш}. \qquad (2.209)$$

Для того, чтобы добиться статистической эквивалентности исходной информации о времени пребывания системы в определенном состоянии преобразованной случайной величины, необходимо найти закон распределения числа псевдосостояний (порядок потока Эрланга $p_п$). Очевидно, что такой закон распределения должен удовлетворить по определению характеристической функции следующему уравнению – дискретному аналогу уравнения (2.206)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - it\lambda^{-1}\right)^{-n} p_n = \phi(t), \qquad (2.210)$$

где $\left(1 - it\lambda^{-1}\right)^{-n}$ – характеристическая функция распределения Эрланга случайной величины T с целочисленным параметром формы n.

Используя метод моментов и постулируя вид закона распределения p_n, решение уравнения (2.210) можно приблизить с достаточно высокой степенью точности. Действительно, последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения и используя свойства характеристических функций, можно составить следующую систему уравнений моментов

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^{-1} p_n = m_1, \qquad (2.211)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\lambda^{-2} p_n = m_2,$$

(2.212)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\lambda^{-3} p_n = m_3, \qquad (2.213)$$

или в общем виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!} \lambda^{-r} p_n = m_r, \quad r = 1,2,3... \qquad (2.214)$$

Очевидно, что число используемых уравнений вида (2.214) должно определяться числом параметров закона распределения p_n. Так, например, сложной системе, осуществляющей переход из состояния S_1 в состояние S_2, статистическая информация о времени пребывания которой в состоянии S может быть представлена в виде характеристической функции $\varphi\{t\}$, может быть поставлено в соответствие пуассоновское число псеводосостояний n, определяемое законом

$$p_n = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}, \; n = 0,1,... \qquad (2.215)$$

и интенсивность перехода между псевдосостояниями λ. Тогда, используя метод моментов и свойства характеристических функций, нетрудно определить из уравнении (2.210) и (2.11), что среднее число псевдосостояний будет равно следующему выражению

$$\nu = \frac{2}{\nu_t^2}, \qquad (2.216)$$

где ν_t – коэффициент вариации времени пребывания системы в состоянии S_1, , а интенсивность перехода

$$\lambda = \frac{\nu}{m_t}. \qquad (2.217)$$

Распределение Пуассона (2.215) является наиболее распространенной моделью для описания случайного числа появления так называемых редких событий в фиксированном промежутке времени.

Продолжая обсуждение предлагаемого метода построения математических моделей стохастических систем с дискретными состояниями и непуассоновскими переходами, следует заметить. Что степень универсальности любого закона распределения определяется ограничениями и условиями, положенными в схематизацию стохастического эксперимента (с точки зрения теории вероятности). В общем случае, как было отмечено выше, слабым ограничениям соответствует большая степень универсальности. Более точная аппроксимация механизма формирования случайных величин порождает более сложные математические модели, учитывающие специфику явления, естественной платой за это является более узкая область применения и чувствительность модели к нарушениям условий исследуемого процесса.

В связи с этим дадим краткое описание некоторых типов распределений, обладающих определенной универсальности (в рамках схематизации логистического потока, соответствующего закону Пуассона) и допускающих содержательную модификацию, учитывающую специфику рассматриваемой проблемы. Общим в формировании таких моделей являются рандомизация параметра закона Пуассона и использование аппарата производящих функций. Так, например, если r случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром ν, то этот параметр рассматривается как случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром

$$\mu = P\left(1 - P^{-1}\right) \text{ и } = m = k, \qquad (2.218)$$

$$f(\nu) = \frac{\mu}{\Gamma(m)}(\mu\nu)^{m-1} e^{-\nu\lambda\mu}, \qquad (2.219)$$

то вероятность того, что $r = n$, определяется по зависимости

$$p(r = n) = C_{k+n-1}^{k} p^{k} (1-p)^{n}, \qquad (2.220)$$

т.е. случайная величина r имеет отрицательное биноминальное распределение (распределение Паскаля) с параметрами (p, k). Для такого случая система уравнений (2.214) трансформируется в систему вида

$$\lambda^{1} \frac{(1-p)k}{p} = m_1,$$

$$\lambda^{-2}\left[\frac{(1-p)^2}{p^2} + 2\frac{(1-p)k}{p^2}\right] = m_2,$$

$$\lambda^{-3}\left\{E\left[n^3\right] + 3E\left[n^2\right] + 2E[n]\right\} = m_3,$$

(2.221)

из которой однозначно определяются параметры закона Паскаля (k и p) и интенсивность перехода λ.

Приведенную выше модель дополним еще одной модификацией пуассоновского распределения, имеющей практическое значение для прогнозирования параметров потока. Если параметр ν пуассоновского распределения сам является случайной величиной с математическим ожиданием m_ν и дисперсией σ^2 и распределен по нормальному закону,

то модификация пуассоновского распределения может быть получены следующим образом. Производящая функция распределения Пуассона имеет вид

$$f(t) = e^{\nu(t-1)}.$$

Математическое ожидание $f(t)$ определяется в результате ее осреднения

$$E\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(t-1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m_\nu - \nu)^2}{2\sigma^2}} d\nu = e^{m_\nu (t-1) - \frac{\sigma^2}{2}(t-1)^2}.$$

(2.223)

Нижний предел интеграла предполагает справедливость условия $\sigma << m_\nu$ (практически $m_\nu > 3\sigma$). Используя свойство производящей функции

$$\frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big|_{t=1} = E\left[n^k\right],$$

можно найти первые три начальных момента случайного числа псевдосостояний. Тогда исходная система уравнений рассматриваемого случая трансформируется к следующему виду

$$\lambda^{-1} m_\nu = m_1,$$
$$\lambda^{-2}\left[m_\nu^2 + \sigma^2 + m_\nu\right] = m_2$$
$$\lambda^{-3}\left[m_\nu^3 + 3m_\nu\sigma + 3m_\nu^2 + 3\sigma^2 + 3m_\nu\right] = m_3.$$

(2.224)

Система (2.224) однозначно определяет параметры m_ν, σ^2 и λ первые три момента времени существования системы.

Учитывая сложный характер логических процессов, приведем еще некоторые дополнительные соображения по выбору законов распределения числа псевдосостояний. С этой целью рассмотрим обобщенное распределение Пуассона

$$P_{n=\nu_2}(\nu_2 + n\nu_1)^{n-1} e^{-\nu_2 - n\nu_1}. \qquad (2.225)$$

Распределение (2.225) является «гибким» и позволяет хорошо согласовать систему исходных данных с параметрами модели с помощью системы уравнений вида (2.224)

Сопоставляя зависимости (2.224) и (2.225), можно выразить начальные моменты случайного числа псевдосостояний через параметры ν_1 и ν_2

$$E[n] = \nu_2,$$

(2.226)

$$E\left[n^2\right] = \nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2,$$

(2.227)

$$E\left[n^3\right] = 9\nu_1^2\nu_2 + 6\nu_1\nu_2^2 + \nu_2^3.$$

(2.228)

Тогда система (2.214) будет иметь следующий вид:

$$\lambda^{-1}\nu_2 = m_1,$$
$$\lambda^2(\nu_2^2 + 2\nu_1 + \nu_2) = m_2,$$
$$\lambda^3(9\nu_1^2\nu_2 + 6\nu_1\nu_2^2 + \nu_2^3 + 3\nu_2^2 + \nu_2) = m_3,$$

Таким образом, используя метод рандомизации параметров закона распределения Пуассона можно построить широкий класс аналитико-статистических моделей показателей логистического потока. Требуемая точность оценок показателей в этом случае достигается гибкостью вводимых в рассмотрение законов распределения числа псевдосостояний n и адаптируемостью к форме задания системы исходных данных.

НЕ КОПИРОВАТЬ